ПРАВИЛА ЗА ПОЛАГАЊЕ ИСПИТА ИЗ НУМЕРИЧКЕ АНАЛИЗЕ У ТОКУ СЕМЕСТРА

1. Испит се састоји из **писменог** и **усменог** дела. Писмени део испита је **елиминаторан**.

2. Активности у току семестра могу бити **обавезне** и **опционе**, а одвијају се у две фазе.

3. **Прва фаза** почиње са почетком летњег семестра и завршава се са другом колоквијумском недељом.

4. **Друга фаза** почиње са завршетком прве и завршава се са термином усменог испита у јулском испитном року.

5. Преглед активности по фазама дат је у Табели 1.

ФАЗА	АКТИВНОСТ	
	обавезна	**опциона**
Прва фаза	Писмени испит Први део усменог испита	Семинарски рад Домаћи рад Тема 8
Друга фаза		Други део усменог испита

Табела 1: Активности у току семестра

ПИСМЕНИ ИСПИТ

- Да би стекао право да писмени део испита полаже у току семестра, студент је обавезан да положи **елиминациони задатак** из Теме 1 у Табели 2.

- Теме Т2 и Т7, Т3 и Т4, Т5 и Т6 су алтернативне, Табела 2. Студент бира по једну (укупно три) од алтернативних тема.

- Из сваке од одабраних тема студент полаже **један задатак** уз коришћење мрежног софтвера и расположиве литературе. Положен задатак вреднује се са 8, 9 или 10 поена, Табела 2.

- Полагања се одвијају у унапред заказаним терминима вежби, терминима колоквијума или у договореним ванредним терминима.

Редни број	Тема (Т)	Начин полагања	Број поена
1	Приближни бројеви и грешке функције	писмено	6
2	Нелинеарне једначине	софтвер	8-10
3	Системи линеарних једначина	софтвер	8-10
4	Системи нелинеарних једначина	софтвер	8-10
5	Полиномска интерполација	софтвер	8-10
6	Апроксимација функција	софтвер	8-10
7	Нумеричко диференцирање и интеграција	софтвер	8-10
8	Диференцијалне једначине	софтвер	3-5

Табела 2: Теме за полагање испита

- У оквиру редовних термина студент може полагати одређену тему **највише два пута**. Вреднује се **последње** полагање.
- **Минималан број поена:** 30 (6 из Т1 + по 8 из **три по избору** теме од Тема 2-7).
- **Максималан број поена:** 36 (6 из Т1 + по 10 из одабраних тема)
- **Студент је положио писмени испит** ако је освојио најмање минималан број поена.
- Положени писмени испит важи у текућој школској години.

ПРВИ ДЕО УСМЕНОГ ИСПИТА

- Полажу се **уводна питања** из три од преосталих (у односу на писмени део испита) алтернативних тема из Табеле 2. Полагање се врши на посебним обрасцима за сваку тему.
- Уводна питања су формулисана у складу са **Упутством за припрему уводних питања**.
- **Максималан** број поена за сваку тему је 8.
- Студент је положио први део усменог испита ако је освојио **најмање** 12 од могућих 24 поена и ако је на свакој од три полагане теме освојио **најмање** 3 поена.

СТУДЕНТ ЈЕ ПОЛОЖИО ИСПИТ АКО ЈЕ ПОЛОЖИО ПИСМЕНИ ИСПИТ И ПРВИ ДЕО УСМЕНОГ ИСПИТА

ДОМАЋИ ЗАДАТАК

- Домаћи задатак може бити:
  - један проблем или задатак из поглавља Проблеми, задаци и коментари важећег уџбеника
  - један задатак из поглавља Задаци за вежбу важеће збирке задатака
  - теорема која је у важећем уџбенику наведена без доказа, са упућивањем на литературу
- Домаћи задатак се предаје у штампаној форми
- Домаћи задатак брани се усмено у термину консултација предметног наставника
- Одбрањен домаћи задатак се вреднује са 6 поена
- На претходних 6 поена може се додати 1,2,3 или 4 поена, у зависности од сложености домаћег задатка

ТЕМА 8

- Студент полаже тему Т8 из Табеле 2.
- Право полагања Теме 8 стичу студенти који по завршетку редовне наставе имају положен писмени испит.
- Полагање се врши на исти начин као и полагање алтернативних тема у оквиру писменог испита (софтвер).
- За положену Т8 студент добија 3, 4 или 5 поена.

УКУПАН БРОЈ ПОЕНА (УП) после завршене прве фазе рачуна се по формули

$$\boxed{\text{УП}=(\text{П}+\text{У}1)^{*}\ \text{к}(\text{А})+\text{Д}+\text{Т}8}$$

где је

П - број поена на писменом делу испита

У1 - број поена на првом делу усменог испита

А - број поена за активности на настави
Д - број поена за домаћи рад
Т8 - број поена за Тему 8

- Вредност за А добија се на основу евидентираних долазака на предавања или за друге активности у оквиру наставе.
- Вредност коефицијента $k(A)$ рачуна се по формули

$$k(A) = \begin{cases} 1 & \text{за } A = 0 \\ 0.025A + 1.125 & \text{за } A > 0 \end{cases}$$

- Неке вредности за $k(A)$ наведене су у следећој табели.

A	0	1	2	3	4	5
$k(A)$	1	1.15	1.175	1.2	1.225	1.25

Оцена за положени испит изводи се према следећој табели.

УП	[51-60]	[61-70]	[71-80]	[81-90]	[91-100]
Оцена	6	7	8	9	10

Табела 3: Скала за оцене

ДРУГИ ДЕО УСМЕНОГ ИСПИТА

- **Право полагања** другог дела усменог испита имају студенти чији број поена на основу активности у настави **није мањи** од 3.
- Полагање се врши искључиво у **јунском** или **јулском** испитном року.
- Студентима се на располагање стављају **три групе питања**. Сва питања прве групе вреднована су са 5, друге са 6, а треће са 7 поена.
- Студент бира **једну** или (највише) **две групе** питања које жели одговарати, а затим добија по једно питање из сваке од одабраних група.
- Полагање се врши у усменој форми.

КОНАЧАН БРОЈ ПОЕНА (КП) после завршене друге фазе рачуна се по формули

$$\boxed{\text{КП}=\text{УП}+\text{У2}}$$

где је У2 број поена на другом делу усменог испита.

ЗАВРШНА ОЦЕНА се добије када се број поена (УП) у Табели 3 замени са (КП).

УПУТСТВО ЗА ПРИПРЕМУ УВОДНИХ ПИТАЊА

Нелинеарне једначине

1. Етапе у нумеричком решавању једначине $f(x) = 0$.
2. Дефинисати и графички интерпретирати интервал изолације корена једначине $f(x) = 0$.
3. Довољан услов за егзистенцију корена једначине $f(x) = 0$ на интервалу (a, b).
4. Довољан услов за егзистенцију и јединственост корена једначине $f(x) = 0$ на интервалу (a, b).
5. Карактеристика итеративних метода за решавање нелинеарне једначине $f(x) = 0$.
6. Ред конвергенције итеративне методе. Специјални случајеви ($p = 1, 2, \ldots$).
7. Метода половљења интервала. Геометријска интерпретација и формула за итеративни низ.
8. Њутнова метода. Геометријска интерпретација. Формула за итеративни низ.
9. Навести довољне услове за конвергенцију Њутнове методе.
10. Брзина конвергенције Њутнове методе. Извођење формуле

$$|\xi - x_n| \leq \frac{M_2}{2m_1}|\xi - x_{n-1}|^2.$$

11. Грешка Њутнове методе. Извођење формуле

$$|\xi - x_n| \leq \frac{M_2}{2m_1}|x_n - x_{n-1}|^2. \tag{1}$$

12. Извођење формуле за итеративни низ методе сечице.
13. Метода *regula falsi*. Геометријска интерпретација и формула за итеративни низ.
14. Једнокорачна *regula falsi*. Геометријска интерпретација и формула за итеративни низ. Услови за избор x_0 и x_f.
15. Метода итерације. Трансформација једначине $f(x) = 0$ и формула за итеративни низ. Геометријска интерпретација конвергентног случаја.

16. Кључни услов за конвергенцију методе итерације.
17. Извођење формуле за апостериорну грешку методе итерације.
18. Поређење нумеричких метода за решавање нелинеарних једначина у односу на брзину конвергенције.

Системи линеарних једначина

1. Записи система од n линеарних једначина са n непознатих у скаларном и векторском облику.
2. Класификација метода за решавање система линеарних једначина. Карактеристика итеративних метода.
3. Дефиниција норме вектора.
4. Примери векторских норми у $\boldsymbol{R}^n$.
5. Рачунање векторских норми. Примери.
6. Дефиниција растојања у нормираном простору.
7. Рачунање растојања у простору $\boldsymbol{R}^n$ у различитим нормама. На пример, израчунати $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ у норми $\|\cdot\|_\infty$ ако је $\boldsymbol{x} = (2, -1, 0, 4)$, $\boldsymbol{y} = (-1, 5, 1, -2)$.
8. Дефиниција конвергентног низа у нормираном простору.
9. Дефиниција матричне норме.
10. Примери матричних норми у простору $\mathcal{M}_n$.
11. Рачунање матричних норми. Примери.
12. Дефиниција матричне норме која је сагласна датој векторској норми.
13. Навести матричне норме које су сагласне редом векторским нормама $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_\infty$ и $\|\cdot\|_2$.
14. Индукована матрична норма. Дефиниција и особине.
15. Навести матричну норму коју индукује:

- апсолутна векторска норма,
- еуклидска векторска норма,
- униформна векторска норма?

16. Дефиниција сопствених вредности и сопствених вектора матрице.
17. Карактеристична једначина матрице.
18. Дефиниција спектра матрице. Примери.
19. Дефиниција спектралног радијуса матрице. Примери.
20. Опис методе просте итерације. Формула за итеративни низ у векторском и скаларном облику.
21. Навести потребан и довољан услов конвергенције методе просте итерације.
22. Испитивање конвергенције итеративног процеса на конкретним примерима (видети Пример 3.9 у уџбенику на стр. 69).

23. Навести довољан услов конвергенције методе просте итерације.
24. Дефиниција дијагоналне доминантности матрице. Написати услове дијагоналне доминантности за квадратне матрице реда $n = 3, 4, \ldots$.
25. Извести формулу за итеративни низ Јакобијеве методе.
26. Навести довољан услов конвергенције Јакобијеве методе.
27. Реализација идеје Гаус-Зајделове методе на конкретним случајевима. На пример, помоћу којих компоненти се рачуна $x_5^{(3)}$ (непозната x_5 у трећој итерацији) ако систем линеарних једначина има девет непознатих $x_1, \ldots, x_9$?
28. Извести формулу за итеративни низ Гаус-Зајделове методе.
29. Навести два довољна услова конвергенције Гаус-Зајделове методе.

Системи нелинеарних једначина

1. Скаларни и векторски запис система нелинеарних једначиона.
2. Дефиниција контрактивног пресликавања $\boldsymbol{F} : \boldsymbol{D} \subseteq \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{D}$.
3. Дефиниција Јакобијеве матрице пресликавања $\boldsymbol{F}$ у тачки $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{D}$.
4. Одређивање Јакобијеве матрице за конкретна пресликавања. На пример, за пресликавање

$$\boldsymbol{F}(x, y) = \begin{bmatrix} x^2 + xy^3 - 1 \\ x \sin^2 y \end{bmatrix}.$$

5. Дефиниција Хесијанове матрице (хесијана) пресликавања $f : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$.
6. Одређивање Хесијанове матрице за конкретна пресликавања. На пример, за пресликавање

$$f : (x, y, z) \mapsto x \sin y + 2x^3 y^2 - \ln(1 + x^2).$$

7. Метода итерације. Извођење формуле за итеративни низ у скаларном и векторском облику.
8. Ако је пресликавање $\boldsymbol{G}$ дефинисано на лопти $\boldsymbol{S} = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n : \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\| \le r\}$, навести довољне услове конвергенције методе итерације.
9. Ако су испуњени довољни услови конвергенције методе итерације, навести формулу за оцену грешке n-те итерације.
10. Извођење формуле за итеративни низ методе Њутн-Канторовича.
11. Навести итеративни низ за једну модификацију методе Њутн-Канторовича.

Полиномска интерполација

1. Скицирати график интерполационог полинома функције f која је задана вредностима у чворовима $x_0, \ldots, x_n$. Размотрити специјалне случајеве када је $n = 2, 3, \ldots$. За сваки од ових случајева одредити степен интерполационог полинома.

2. Који проблем се решава интерполацијом функције f функцијом g? Навести интерполационе услове за функцију g.
3. Написати израз за Лагранжов интерполациони полином $P_n(x)$ за $n - 1, 2, 3, \dots$.
4. Извести формулу за Лагранжов интерполациони полином.
5. Дефинисати грешку полиномске интерполације и интерпретирати је графички.
6. Написати израз за: а) грешку б) оцену грешке полинономске интерполације ако $f \in C^{(n+1)}[a, b]$.
7. Дефиниција подељене разлике k-тог реда у чвору x_i. Написати одговарајуће дефиниције за конкретне случајеве, нпр. за

$$f[x_0, x_1], f[x_1, x_2], ..., f[x_0, x_1, x_2], f[x_1, x_2, x_3] \dots$$

8. Написати израз за везу између подељене разлике и вредности функције у чворовима $x_0, \dots, x_n$. Изразити дату подељену разлику преко вредности функције у чворовима, нпр. за подељене разлике

$$f[x_0, x_1],\ f[x_1, x_2], ..., f[x_0, x_1, x_2],\ f[x_1, x_2, x_3] \dots$$

9. Написати израз за Њутнов интерполациони полином са базним чвором x_0.
10. Написати израз за Њутнов интерполациони полином са базним чвором x_n.
11. Дефинисати коначну разлику k-тог реда функције f у тачки x. Специјално, дефинисати коначне разлике $\Delta f(x)$, $\Delta^2 f(x), \dots$.
12. Дефинисати коначну разлику k-тог реда функције f у чвору x_i. Специјално, дефинисати коначне разлике Δy_0, $\Delta y_1, \dots, \Delta^2 y_0$, $\Delta^2 y_1 \dots$
13. Навести везу између подељених и коначних разлика k-тог реда у чвору x_i. Размотрити специјалне случајеве

$$f[x_0, x_1],\ f[x_1, x_2], ..., f[x_0, x_1, x_2],\ f[x_1, x_2, x_3] \dots$$

14. Написати израз за први Њутнов интерполациони полином са еквидистантним чворовима у односу на промењљиву s. Навести везу између x и s.
15. Извести формулу за први Њутнов интерполациони полином са еквидистантним чворовима.
16. Навести апроксимативну везу између n-тог извода фунције f у чвору x_i и одговарајуће коначне разлике. Написати израз за апроксимативну грешку првог Њутновог интерполационог полинома.
17. Написати израз за други Њутнов интерполациони полином са еквидистантним чворовима у односу на промењљиву s. Навести везу између

x и s.
18. Који се проблем решава инверзном интерполацијом? Навести један интерполациони полином функције f^{-1} који се користи у инверзној интерполацији.

Апроксимација функција

1. Облик апроксимационе функције у општем случају. Скица графика апроксимационе функције за дате податке.
2. Навести p-норму као меру одступања апроксимационих од експерименталних података. Написати израз за p-норму ако је $p = 1, 2, \ldots$.
3. Написати израз за функцију квадратног одступања.
4. Написати израз за функцију која се минимизира у методи најмањих квадрата.
5. Навести услове из којих се одређују апроксимациони параметри у методи најмањих квадрата.
6. Израз за уопштени полином.
7. Израз за функцију квадратног одступања ако је апроксимациона функција уопштени полином.
8. Запис система нормалних једначина у матричном облику уз навођење матрице A, вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{y}$. Размотрити специјалне случајеве када је $(m, n) = (2, 3)$, $(m, n) = (2, 4)$,$(m, n) = (3, 4), \ldots$.
9. Навести базне функције ако је апроксимациона функција алгебарски полином m-тог степена. Написати израз за алгебарски полином m-тог степена и одговарајућу матрицу A ако је $m = 2, 3, \ldots$.
10. Запис система нормалних једначина ако је апроксимациона функција алгебарски полином m-тог степена. Размотрити специјалне случајеве када је $(m, n) = (2, 3)$, $(m, n) = (2, 4)$, $(m, n) = (3, 5), \ldots$.
11. Облик апроксимационе функције и запис система нормалних једначина ако је апроксимациона функција алгебарски полином првог степена.
12. Графичка интерпретација линеарне зависности.
13. Свођење нелинеарних зависности на линеарне.
14. Запис система од m линеарних једначина са n непознатих. Израз за функцију квадратног одступања $F(x_1, \ldots, x_n)$ преодређеног система. Специјални случајеви: $(m, n) = (3, 2)$, $(m, n) = (4, 2)$, $(m, n) = (4, 3), \ldots$. Графичка илустрација случајева у којима је $n = 2$.
15. Дефиниција решења преодређеног система линеарних једначина.
16. Одређивање решења преодређеног система линеарних једначина.

Нумеричко диференцирање и интеграција

1. Написати формулу за рачунање $f'(x_k)$ ако се функција f апроксимира Лагранжовим интерполационим полиномом. Шта се узима за приближну вредност извода, а шта за грешку те приближне вредности?
2. Шта је квадратурна формула? Дефинисати грешку квадратурне формуле ако се подинтегрална функција апроксимира интерполационим полиномом.
3. Извести формулу за правило левих правоугаоника и дати графичку интерпретацију правила.
4. Написати формуле за правила: а) десних б) средњих правоугаоника и интерпретирати правила графички.
5. Извести формулу за трапезно правило и дати графичку интерпретацију правила.
6. Извести формулу за Симпсоново правило и дати графичку интерпретацију правила. Чиме се замењује површина криволинијског трапеза који одговара функцији f?
7. Навести формуле за грешке: а) правила левих правоугаоника б) трапезног правила в) Симпсоновог правила и дати графичку интерпретацију грешака.
8. Дефинисати алгебарски степен тачности квадратурне формуле $Q_n(f)$. Написати дефиницију ако је $m = 0, 1, 2, \ldots$.
9. Који алгебарски степен тачности имају: а) правило левих правоугаоника б) трапезно правило в) Симпсоново правило?
10. На којим формулама се базира извођење: а) уопштене формуле левих правоугаонока б) уопштене трапезне формуле в) уопштене Симпсонове формуле?
11. Навести теорему која се користи код извођења грешке уопштених квадратурних формула.
12. Извести уопштену: а) формулу левих правоугаоника б) трапезну формулу в) Симпсонову формулу.
13. Извести формулу за грешку и оцену грешке: а) уопштене формуле левих правоугаоника б) уопштене трапезне формуле в) уопштене Симпсонове формуле.