1\. 1 Доказати да је формула

$\neg(p \Rightarrow q) \vee (p \wedge r \Rightarrow q \wedge r)$

таутологија методом свођења на противречност.

Решење:

$\neg(p \Rightarrow q) \vee (p \wedge r \Rightarrow q \wedge r) \equiv F$

1) Претпоставимо да је $\tau(F) = \perp$ за неке вредности p, q, r

2) $\tau(\neg(p \Rightarrow q)) = \perp$ (из 1))

3) $\tau(p \wedge r \Rightarrow q \wedge r) = \perp$ (из 1))

4) $\tau(p \wedge \neg q) = \perp$ (из 2))

5) $\tau(p \wedge r) = \top$ (из 3))

6) $\tau(q \wedge r) = \perp$ (из 3))

7) $\tau(p) = \top$ и $\tau(r) = \top$ (из 5))

8) $\tau(q \wedge \top) = \perp$ па је $\tau(q) = \perp$ (заменом 7) и 6))

Претпоставка није тачна, дакле следи $\tau(F) = \top$ за све p, q, r дакле формула F је таутологија.

I (2.) $D = P(A)$, $A \neq \emptyset$, $\alpha : =$, $f : \cup$, $a : \emptyset$

$$F = (\exists x)(\forall y)((\exists z)\alpha(f(x,z),y) \Rightarrow ((\alpha(x,y) \wedge \neg\alpha(y,z)) \Rightarrow \alpha(z,a))).$$

$(\exists x)(\forall y)[(\exists z)\ x \cup z = y \Rightarrow ((x = y \wedge y \neq z) \Rightarrow z = \emptyset)] \Leftrightarrow$

$(\exists x)(\forall y)[x \subseteq y \Rightarrow (x \neq y \vee y = z \vee z = \emptyset)] \Leftrightarrow$

$(\exists x)\underline{(\forall y)}[x \nsubseteq y \vee \underline{x \neq y} \vee y = z \vee z = \emptyset] \Leftrightarrow$

[користимо $(\forall x)(x \neq t \vee \varphi(x)) \Leftrightarrow \varphi(t)$

$(\exists x)[x \nsubseteq x \vee x = z \vee z = \emptyset] \Leftrightarrow$

$(\exists x)\, x \nsubseteq x \vee (\exists x)\, x = z \vee z = \emptyset \Leftrightarrow$

$\bot \vee \top \vee z = \emptyset \Leftrightarrow \top$

$v(F) = 1$

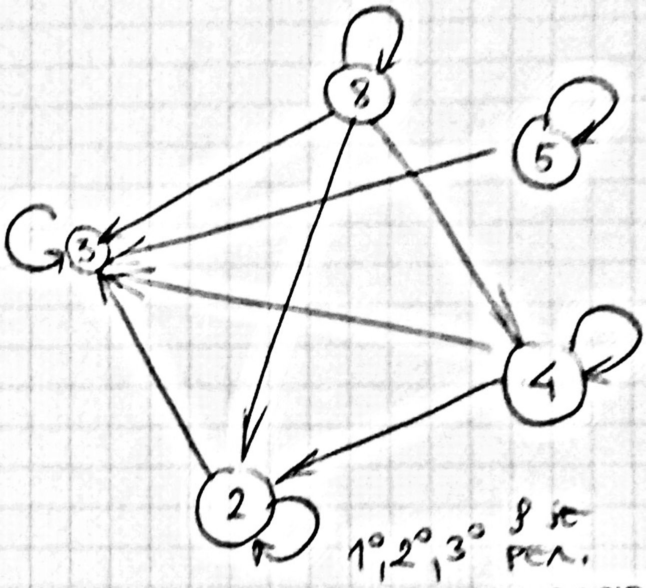
3.

$x, y \in S$ $\quad x \rho y \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{N})\ 3x + y = ky$

$\Leftrightarrow 3x = (k-1)y$

a) $S = \{2, 3, 4, 5, 8\}$

	2	3	4	5	8
2	1	1	0	0	0
3	0	1	0	0	0
4	1	1	1	0	0
5	0	1	0	1	0
8	1	1	1	0	1



1°, 2°, 3° ρ је рел. поретка на S

1° рефлексивност

(Р) $(\forall x \in S)\ x \rho x$ (јединице на дијагонали у таблици)

2° Антисиметричност

(АС) $(\forall x, y \in S)\ x \rho y,\ y \rho x \Rightarrow x = y$ (види се из графа или таблице сви чворови повезани нула или једном граном)

3° транзитивност

(Т) $(\forall x, y, z \in S)\ x \rho y,\ y \rho z \Rightarrow x \rho z$

јесте јер
$4 \rho 2,\ 2 \rho 3 \Rightarrow 4 \rho 3$
$8 \rho 2,\ 2 \rho 3 \Rightarrow 8 \rho 3$
$8 \rho 4,\ 4 \rho 2 \Rightarrow 8 \rho 2$
$8 \rho 4,\ 4 \rho 3 \Rightarrow 8 \rho 3$

једини случајеви због којих се могло десити да не важи транзитивност

$5 \not\rho 8,\ 8 \not\rho 5 \longrightarrow \rho$ је рел. парцијалног поретка.

б) Нека су $x, y \in \mathbb{N}$ т.д. $x \rho y$ и $y \rho x$.
Тада постоје неки $k_1, k_2 \in \mathbb{N}_0$ такви да је

$$3x+y=(k_1+1)y \quad \text{и} \quad 3y+x=(k_2+1)x$$

$$x=\frac{k_1 y}{3} \quad \text{и} \quad y=\frac{k_2 x}{3}.$$

Одавде следи да је $x=\frac{k_1 y}{3}=\frac{k_1 k_2 x}{9}$

$x \neq 0$ $\quad k_1 k_2 = 9$.

Да би било $x=y$ потребно је $k_1=k_2=3$, али то не следи из $k_1 k_2 = 9$. У случају $k_1=1$ и $k_2=9$ што се реализује за $x=1$ и $y=3$. Непосредно се проверава да је $1 \rho 3$ и $3 \rho 1$ па ρ није антисиметрична, самим тим није релација поретка на $S=\mathbb{N}$.