

Математика 1

Вежбе 1

Данијел Алексић

Универзитет у Београду
Факултет организационих наука



2023

- 1 Алгебарске структуре
- 2 Линеарна алгебра: матрице и детерминанте
- 3 Матричне једначине, ранг матрице
- 4 Системи линеарних једначина
- 5 Векторски простори: скаларни, векторски и мешовити производ
- 6 Аналитичка геометрија у простору 1
- 7 Аналитичка геометрија у простору 2
- 8 Низови 1
- 9 Низови 2
- 10 Граничне вредности и непрекидност функција
- 11 Први и други извод и примене
- 12 Тејлоров и Маклоренов полином
- 13 Скицирање графика функције

Нека је X скуп и $*$ бинарна операција на њему.

$(X, *)$ зове се **алгебарска структура**.

У њој могу важити (или не) следећа својства.

- 1 Затвореност.** $(\forall x, y \in X) x * y \in X$
- 2 Асоцијативност.** $(\forall x, y, z \in X) (x * y) * z = x * (y * z)$
- 3 Постојање неутрала.**
 $(\exists e \in X) (\forall x \in X) x * e = e * x = x$
 e се зове *неутрал*
- 4 Постојање инверза.**
 $(\forall x \in X) (\exists x^{-} \in X) x * x^{-} = x^{-} * x = e$
- 5 Комутативност.** $(\forall x, y \in X) x * y = y * x$

Дефиниција

- 1 Важи *затвореност*: $(X, *)$ је **группоид**
- 2 Важе *затвореност* и *асоцијативност*: $(X, *)$ је **полугрупа**
- 3 Важе *затвореност* и *асоцијативност* и *постоји неутрал*: $(X, *)$ је **моноид**
- 4 Важе *затвореност* и *асоцијативност*, *постоји неутрал* и *сваки елемент има инверз*: $(X, *)$ је **група**
- 5 Важе *затвореност* и *асоцијативност*, *постоји неутрал*, *сваки елемент има инверз* и *важи комутативност*: $(X, *)$ је **Абелова група**

Напомена

Понекад је згодно раније проверити комутативност...

Задатак

Ако је $A = \{x + y\sqrt{2} \mid x, y \in \mathbb{Q}\}$ и $x * y = x \cdot y$, испитати да ли је $(A, *)$ Абелова група.

1 Затвореност. Нека су $x + y\sqrt{2}$ и $a + b\sqrt{2}$ из A .

$$\begin{aligned}(x + y\sqrt{2}) * (a + b\sqrt{2}) &= (x + y\sqrt{2}) \cdot (a + b\sqrt{2}) \\&= x \cdot a + y\sqrt{2} \cdot a + x \cdot b\sqrt{2} + y\sqrt{2} \cdot b\sqrt{2} \\&= \underbrace{(xa + 2yb)}_{\in \mathbb{Q} \text{ јер?}} + \underbrace{(ya + xb)}_{\in \mathbb{Q} \text{ јер?}} \sqrt{2} \in A\end{aligned}$$

Затвореност важи.

2 **Асоцијативност.** Важи јер је множење реалних бројева асоцијативно.

5 **Комутативност.** Важи јер је множење реалних бројева комутативно.

3 **Постојање нултра.** Тражимо елемент $e = e_1 + e_2\sqrt{2} \in A$ такв да за свако $x + y\sqrt{2} \in A$ важи $(e_1 + e_2\sqrt{2}) * (x + y\sqrt{2}) = (x + y\sqrt{2}) * (e_1 + e_2\sqrt{2}) = x + y\sqrt{2}$

Довољно: $(e_1 + e_2\sqrt{2}) * (x + y\sqrt{2}) = x + y\sqrt{2}$ (зашто?)
„Пролази” $e = 1 + 0\sqrt{2} \in A$

Постоји нултрал у A .

Напомена

Увек проверити да ли $e \in A$!

- 4 **Постојање инверза.** Нека је $x + y\sqrt{2} \in A$
произвољан елемент. Тражимо елемент $a + b\sqrt{2} \in A$
такав да је

$$(x + y\sqrt{2}) * (a + b\sqrt{2}) = e = 1$$

(довољно због комутативности)

Али, ако узмемо $x + y\sqrt{2} = 0$ (што заиста припада A)

$$0 * (a + b\sqrt{2}) = 0 \cdot (a + b\sqrt{2}) = 0$$

шта год било $a + b\sqrt{2}$

Дакле, 0 припада A , а нема инверз!

$(A, *)$ није Абелова група, већ (комутативан) моноид!

Напомена

Обратити пажњу на редослед квантификатора код неутрала
и инверза: $\exists \forall$ vs. $\forall \exists$

Задатак

Ако је $A_1 = \{x + y\sqrt{2} \mid x, y \in \mathbb{Q}, x^2 + y^2 \neq 0\}$ и $x * y = x \cdot y$, испитати да ли је $(A_1, *)$ Абелова група.

Користимо резултате претходног задатка.

- 1 Затвореност.** Преноси се из претходног задатка.
- 5 Комутативност.** Преноси се из претходног задатка.
- 2 Асоцијативност.** Преноси се из претходног задатка.
- 3 Постојање неутрала.** Донекле се преноси.

Ако узмемо $e = 1 + 0\sqrt{2}$, својство неутрала ће се пренети. Али, A_1 је мањи скуп од A : Можда је e „испало” из A_1 . Овде: $e \in A_1$.

Постоји неутрал у A_1 .

4 Постојање инверза. Нека је $x + y\sqrt{2} \in A_1$ произвољан елемент. Сада $0 \notin A_1$.

Тражимо елемент $a + b\sqrt{2} \in A_1$ за који је

$$(x + y\sqrt{2}) * (a + b\sqrt{2}) = e = 1.$$

Распишемо

$$(xa + 2yb) + (ya + xb)\sqrt{2} = 1$$

Мора бити

$$xa + 2yb = 1$$

$$ya + xb = 0$$

Како $x + y\sqrt{2} \in A_1$, то $x^2 + y^2 \neq 0$. Дакле, x и y нису истовремено нула!

Ако је $x \neq 0$:

$$xa + 2yb = 1 \quad / - \frac{y}{x}$$

$$ya + xb = 0$$

— — — — —

$$-ya - 2\frac{y^2}{x}b = -\frac{y}{x}$$

$$ya + xb = 0 \quad \text{саберемо}$$

— — — — —

$$\left(-2\frac{y^2}{x} + x\right)b = -\frac{y}{x} \quad / \cdot x$$

— — — — —

$$(-2y^2 + x^2)b = -y$$

Следи

$$b = \frac{-y}{x^2 - 2y^2}$$

Проблем: можда је $x^2 - 2y^2 = 0$.

Претпоставимо да јесте. Тада је

$$\frac{y^2}{x^2} = \frac{1}{2} \quad / \sqrt{\cdot}$$

$$\mathbb{Q} \ni \frac{y}{x} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}$$

Контрадикција! ⚡

Дакле, $x^2 - 2y^2 \neq 0$ за било које дозвољене x и y , па имамо b .

Вратимо у систем и добијемо

$$a = \frac{x}{x^2 - 2y^2}.$$

Јасно, $a, b \in \mathbb{Q}$ и $a^2 + b^2 \neq 0$.

Инверз елемента $x + y\sqrt{2}$ је зато

$$\frac{x}{x^2 - 2y^2} + \frac{-y}{x^2 - 2y^2} \sqrt{2} \in A_1$$

Ако бисмо претпоставили $y \neq 0$, добијамо исто...

Дакле, $(A_1, *)$ је Абелова група.

Да ли је могло лакше?

Јесте.

Инверз од $x + y\sqrt{2} \in A_1$ (који није нула!) тражимо као

$$\frac{1}{x + y\sqrt{2}} = \frac{1}{x + y\sqrt{2}} \frac{x - y\sqrt{2}}{x - y\sqrt{2}} = \frac{x}{x^2 - 2y^2} + \frac{-y}{x^2 - 2y^2} \sqrt{2}$$

и онда поновимо дискусију...

Задатак

Ако је $M = \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$ и $a * b = a + b + ab$, испитати да ли је $(M, *)$ Абелова група.

- **Затвореност.** Нека су a и b произвољни елементи скупа M . Дакле, то су рационални бројеви и ниједан није -1 . Очигледно:

$$a * b = a + b + ab \in \mathbb{Q}$$

Претпоставимо:

$$a + b + ab = -1$$

$$a + ab + b + 1 = 0$$

$$(a + 1)(b + 1) = 0$$

Следи да је $a = -1$ или $b = -1$. Контрадикција. \nexists
Дакле, важи затвореност.

- 5** **Комутативност.** Нека су $a, b \in M$ произвољни елементи. Из особина сабирања и множења рационалних бројева следи

$$\begin{aligned}a * b &= a + b + ab \\&= b + a + ba \\&= b * a.\end{aligned}$$

Дакле, важи комутативност.

- 2** **Асоцијативност.** Нека су $a, b, c \in M$ произвољни елементи. Рачунамо, користећи особине сабирања и множења:

$$\begin{aligned}(a * b) * c &= (a + b + ab) * c \\&= (a + b + ab) + c + (a + b + ab)c \\&= a + b + ab + c + ac + bc + abc \\&= a + b + c + ab + ac + bc + abc\end{aligned}$$

С друге стране,

$$\begin{aligned}a * (b * c) &= a * (b + c + bc) \\&= a + (b + c + bc) + a(b + c + bc) \\&= a + b + c + bc + ab + ac + abc\end{aligned}$$

Упоредимо ли,

$$(a * b) * c = a * (b * c).$$

Дакле, важи асоцијативност.

- 3** Постојање неутрала. Тражимо $e \in M$ такав да за произвољно $a \in M$ буде

$$e * a = a$$

(довољно због комутативности)

Распишемо,

$$e + a + ea = a.$$

Јасно је да „пролази” $e = 0$. Заиста, $e \in M$, јер је рационалан и није -1 .

Неутрал постоји.

- 4** Постојање инверза. Нека је $a \in M$ произвољан.
Тражимо $a^- \in M$ такав да је

$$a * a^- = e = 0,$$

односно

$$a + a^- + aa^- = 0$$

$$a^-(1 + a) = -a.$$

Како је $a \in M$, то, специјално $a \neq -1$, па $1 + a \neq 0$.
Следи

$$a^- = \frac{-a}{1 + a}.$$

Да ли ово значи да a има инверз? Не још!

Јасно, $a^{-} \in \mathbb{Q}$. Али, да ли може бити $a^{-} = -1$? Кад би то било, било би

$$\frac{-a}{1+a} = -1,$$

односно

$$a = 1 + a,$$

односно

$$0 = 1.$$

Контрадикција. ⚡

Дакле, сваки елемент у M има инверз.

$(M, *)$ је Абелова група.

Задатак

Ако је $S = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{Q}, a \neq 0\}$ и $(a, b) * (c, d) = (ac, bc + c + d)$, испитати да ли је $(S, *)$ група. Ако јесте, испитати да ли је Абелова.

1 Затвореност. Нека су $(a, b), (c, d) \in S$ произвољни.

$$(a, b) * (c, d) = (ac, bc + c + d)$$

$a, c \neq 0$ (зашто?), па $ac \neq 0$. Јасно, обе компоненте су рационалне.

Затвореност важи.

5 Комутативност.

$$(1, 2) * (3, 4) = (1 \cdot 3, 2 \cdot 3 + 3 + 4) = (3, 13)$$

$$(3, 4) * (1, 2) = (3 \cdot 1, 4 \cdot 1 + 1 + 2) = (4, 7)$$

Комутативност не важи. Структура није комутативна (Абелова).

2 Асоцијативност. Нека су $(a, b), (c, d), (f, g) \in S$ произвољни. Рачунамо:

$$\begin{aligned}((a, b) * (c, d)) * (f, g) &= (ac, bc + c + d) * (f, g) \\&= ((ac)f, (bc + c + d)f + f + g) \\&= (acf, bcf + cf + df + f + g) \\(a, b) * ((c, d) * (f, g)) &= (a, b) * (cf, df + f + g) \\&= (a(cf), b(cf) + cf + df + f + g) \\&= (acf, bcf + cf + df + f + g).\end{aligned}$$

Дакле, асоцијативност важи.

3 Постојање неутрала. Тражимо $(e_1, e_2) \in S$ такав да за свако $(a, b) \in S$ буде

$$(e_1, e_2) * (a, b) = (a, b)$$

$$(a, b) * (e_1, e_2) = (a, b).$$

Распишемо први услов:

$$(e_1 a, e_2 a + a + b) = (a, b)$$

$(e_1, e_2) = (1, -1)$ испуњава услов и припада S .

Немамо комутативност, морамо проверити да важи

$$(a, b) * (e_1, e_2) = (a, b). \quad \blacktriangleup$$

Неутрал постоји.

4 Постојање инверза. Нека је $(a, b) \in S$ произвољан елемент. Тражимо $(c, d) \in S$ такав да је

$$(a, b) * (c, d) = (1, -1)$$

$$(c, d) * (a, b) = (1, -1).$$


Први услов даје

$$(ac, bc + c + d) = (1, -1),$$

односно

$$ac = 1, \quad bc + c + d = -1$$

$$c = \frac{1}{a}, \quad d = -1 - \frac{b}{a} + \frac{1}{a}.$$

Инверз елемента $(a, b) \in S$ је елемент $(\frac{1}{a}, -\frac{1+a+b}{a})$ који очигледно припада S (Провера слева: .

$(S, *)$ је група. Није Абелова.

Задатак

Ако је $K = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ и $(a, b) * (c, d) = (a + 2^b c, b + d)$, испитати да ли је $(K, *)$ Абелова група.

1 Затвореност.

Узмимо $(0, -1), (1, 1) \in K$.

$$(0, -1) * (1, 1) = (0 + 2^{-1}1, -1 + 1) = \left(\frac{1}{2}, 0\right).$$

$\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$. Не важи затвореност.
 $(K, *)$ није Абелова група.

Методичка збирка решених задатака из Математике 1.
Оливера Мухић, Владимир Балтић, Марија Борић.
ФОН, Београд, 2022.