Матрице

Детермин.

1. задатак

Особине детерминанте

2. задатак

Множење матрица

Инверз матрице

3. задатак

Математика 1
Вежбе 2

Данијел Алексић

Универзитет у Београду
Факултет организационих наука

2023

М1
Вежбе 2

Данијел
Алексић

Матрице
Детермин.
1. задатак
Особине детерминанте
2. задатак
Множење матрица
Инверз матрице
3. задатак

$$A = [a_{ij}]_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Врста, колона

Нека су $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ и $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ матрице и α реалан број.

Збир матрица: $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n}$.

Производ скалара и матрице: $\alpha A = [\alpha a_{ij}]_{m\times n}$.

M1
Вежбе 2

Данијел
Алексић

Матрице
Детермин.
1. задатак
Особине детерминанте
2. задатак
Множење матрица
Инверз матрице
3. задатак

Специјални случајеви

- Квадратна матрица

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- Горње троугаона матрица

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- Доње троугаона матрица ()

Транспонат матрице

М1
Вежбе 2

Данијел
Алексић

Матрице
Детермин.
1. задатак
Особине детерминанте
2. задатак
Множење матрица
Инверз матрице
3. задатак

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{i1} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{i2} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1j} & a_{2j} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{mj} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{in} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{n\times m}$$

Детерминанте 2×2 и 3×3

- $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ **квадратна** матрица
- **Детерминанта** матрице 2×2:

$$\det\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

- Детерминанта матрице 3×3 (**Сарусово** правило):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{matrix} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12} \end{matrix}$$

$$\begin{array}{ccc:cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

Само за детерминанте 3×3.

Матрице
Детермин.
1. задатак
Особине детерминанте
2. задатак
Множење матрица
Инверз матрице
3. задатак

- **Минор** M_{ij} елемента a_{ij} матрице $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ је детерминанта која се добије када се из $\det(A)$ избаце i-та врста и j-та колона
- **Кофактор** A_{ij} елемента a_{ij} јесте

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

- **Лапласов развој детерминанте** по i-тој врсти:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$$

(може и по j-тој колони)

М1
Вежбе 2
Данијел
Алексић
Матрице
Детермин.
1. задатак
Особине детерминанте
2. задатак
Множење матрица
Инверз матрице
3. задатак

Задатак

Доказати да је

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 6.$$

Лапласов развој по другој врсти (зашто баш?).

$$D := -0 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$- 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$D = 4 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}}_{D_1} + \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}}_{D_2}$$

$$\begin{aligned} D_1 &= \left| \begin{array}{ccc|cc} 2 & 2 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 2 & 3 \end{array} \right| \\ &= 2 \cdot 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 2 \cdot 3 \\ &\quad - (2 \cdot 3 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2 \cdot 2) \\ &= 12 + 4 - 6 - (-6 + 6 + 8) \\ &= 10 - 8 \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_2 &= \left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & -1 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & 2 \end{array}\right| \\
&= 6 - 6 + 8 - (4 + 12 - 6) \\
&= 8 - 10 \\
&= -2.
\end{aligned}$$

$$D = 4D_1 + D_2 = 4 \cdot 2 - 2 = 8 - 2 = 6,$$

што је и требало доказати.

Особине детерминанте

1. $\det(A) = \det(A^T)$
2. Ако је цела једна врста или колона матрице A сачињена од нула, онда је $\det(A) = 0$ (зашто?)
3. Множењем неке врсте (колоне) детерминанте и додавањем другој, детерминанта не мења вредност
4. Ако међу врстама или колонама матрице A има једнаких или пропорционалних, онда је $\det(A) = 0$ (зашто?)
5. Заменом места двама врстама (колонама), детерминанта мења само знак
6. A је горње (или доње) троугаона матрица:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Тада је $\det(A) = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ (зашто?).

7. Адитивност по колони (врсти):

$$\begin{vmatrix} a_{11}+\alpha_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+\alpha_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+\alpha_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \alpha_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \alpha_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

(важи за детерминанту произвољног реда)

8. Хомогеност по колони (врсти):

$$\begin{vmatrix} \alpha a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \alpha a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \alpha a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

(важи за произвољну врсту/колону, произвољан ред)

М1
Вежбе 2

Данијел
Алексић

Матрице
Детермин.
1. задатак
Особине детерминанте
2. задатак
Множење матрица
Инверз матрице
3. задатак

2. задатак

Задатак

Доказати да је

$$\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} = a(b-a)(c-b)(d-c).$$

$$\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ 0 & 0 & 0 & d-c \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ IV - III \end{matrix}$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ 0 & 0 & c-b & c-b \\ 0 & 0 & 0 & d-c \end{vmatrix} III - II \\
&= \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ 0 & b-a & b-a & b-a \\ 0 & 0 & c-b & c-b \\ 0 & 0 & 0 & d-c \end{vmatrix} II - I \\
&= a(b-a)(c-b)(d-c),
\end{aligned}
$$

што је и требало доказати.
(детерминанта троугаоне матрице)

Множење матрица

$$A = [a_{ij}]_{m\times k} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{ik} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mk} \end{bmatrix}$$

$$B = [b_{ij}]_{k\times n} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{ij} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{kj} & \cdots & b_{kn} \end{bmatrix}$$

„Средња” димензија мора да буде иста!

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} A_{1\to} \cdot B_{1\downarrow} & A_{1\to} \cdot B_{2\downarrow} & \cdots & A_{1\to} \cdot B_{n\downarrow} \\ A_{2\to} \cdot B_{1\downarrow} & A_{2\to} \cdot B_{2\downarrow} & \cdots & A_{2\to} \cdot B_{n\downarrow} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m\to} \cdot B_{1\downarrow} & A_{m\to} \cdot B_{2\downarrow} & \cdots & A_{m\to} \cdot B_{n\downarrow} \end{bmatrix},$$

где je

$$A_{i\to} \cdot B_{j\downarrow} = \sum_{t=1}^{k} a_{it} b_{tj}$$

скаларни производ i-те врсте матрице A и j-те колоне матрице B.

Особине множења матрица

Теорема (Бине-Коши)

Нека су A и B квадратне матрице истог реда $n \times n$. Тада је

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B).$$

Множење матрица јесте асоцијативно:

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

Напомена

МНОЖЕЊЕ МАТРИЦА НИЈЕ КОМУТАТИВНО!

Матрице
Детермин.
1. задатак
Особине детерминанте
2. задатак
Множење матрица
Инверз матрице
3. задатак

Дефиниција

Нека је A квадратна $n \times n$ матрица. Кажемо да је квадратна $n \times n$ матрица B **инверзна** матрица матрице A уколико је

$$AB = BA = E_n,$$

где је

$$E_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

тзв. **јединична** матрица реда n. Пишемо $B = A^{-1}$.

Коју особину има јединична матрица?

Особине инверзне и транспоноване матрице

Матрице
Детермин.
1. задатак
Особине детерминанте
2. задатак
Множење матрица
Инверз матрице
3. задатак

- $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- $(A+B)^T = A^T + B^T$
- $(AB)^T = B^T A^T$

Матрице
Детермин.
1. задатак
Особине детерминанте
2. задатак
Множење матрица
Инверз матрице
3. задатак

Како наћи инверз?

Дефиниција

Нека је A квадратна матрица реда $n \times n$. Њена **адју(н)гована** матрица дата је као

$$\mathrm{Adj}(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}^T.$$

Теорема

Квадратна матрица A има инверз ***ако и само ако*** $\det(A) \neq 0$. *Тада је тај инверз дат као*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \mathrm{Adj}(A).$$

Матрице
Детермин.
1. задатак
Особине детерминанте
2. задатак
Множење матрица
Инверз матрице
3. задатак

3. задатак

Задатак

Одредити инверзну матрицу матрице

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Поступамо по алгоритму...

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -7 \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3 \quad A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4 \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -12 \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 6 \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -6$$

Дакле

$$\mathrm{Cof}(A) = \begin{bmatrix} -7 & 3 & -2 \\ 4 & 0 & 2 \\ -12 & 6 & -6 \end{bmatrix}$$

то јест

$$\mathrm{Adj}(A) = \begin{bmatrix} -7 & 4 & -12 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 2 & -6 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Рачунамо детерминанту:

$$\det(A) = \left| \begin{matrix} -2 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{matrix} \right| \begin{matrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{matrix} \right|$$

$$= 12 + 0 + 4 - (12 - 2 + 0) = 6.$$

Инверз:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \mathrm{Adj}(A) = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -7 & 4 & -12 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 2 & -6 \end{bmatrix}.$$

М1
Вежбе 2

Данијел
Алексић

Матрице

Детермин.

1. задатак

Особине детерминанте

2. задатак

Множење матрица

Инверз матрице

3. задатак

Литература

Методичка збирка решених задатака из Математике 1.
Оливера Михић, Владимир Балтић, Марија Боричић.
ФОН, Београд, 2022.