

Математика 1

Вежба 4

Данијел Алексић

Универзитет у Београду
Факултет организационих наука



2023.

Систем облика:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$$

У матричној форми:

$$AX = B,$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

У специјалном случају тзв. **квадратног система** ($m = n$)
примењујемо Крамерово правило.

Решавамо **квадратни** систем $AX = B$.

Детерминанта система (Δ) јесте детерм. матрице A .

Детерминанта променљиве x_j (Δ_{x_j}), $1 \leq j \leq n$, јесте детерминанта матрице A_j , која је добијена од A тако што је j -та **колона** замењена колоном B .

Теорема

- *Ако је $\Delta \neq 0$, онда систем има јединствено решење које је дато као:*

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}, \dots, x_n = \frac{\Delta_{x_n}}{\Delta}.$$

- *Ако је $\Delta = 0$, али је **барем неки од Δ_{x_j}** различит од нуле, систем нема решења.*
- *Ако је $\Delta = \Delta_{x_1} = \dots = \Delta_{x_n} = 0$, систем или нема решења, или их има бесконачно много.*

Задатак

Испитати сагласност и решити систем линеарних једначина:

$$x + y - z = -4$$

$$2x + y = 0$$

$$x - y + z = 6$$

Систем је квадратни па покушавамо да га решимо Крамеровим правилом.

$$\begin{aligned}\Delta &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 1 + 0 + 2 - (-1 - 0 + 2) = 2\end{aligned}$$

$$x + y - z = -4$$

$$2x + y = 0$$

$$x - y + z = 6$$

Рачунамо детерминанте непознатих.

$$\begin{aligned}\Delta_x &= \begin{vmatrix} -4 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 0 & 1 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} \\ &= -4 + 0 + 0 - (-6 + 0 + 0) = 2\end{aligned}$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 0 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = -4$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 6$$

На основу Крамеровог правила, систем има јединствено решење које је дато као

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{2}{2} = 1,$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-4}{2} = -2,$$

$$z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{6}{2} = 3.$$

Решење система је уређена тројка

$$(x, y, z) = (1, -2, 3).$$

Задатак

Испитати сагласност и решити систем линеарних једначина:

$$x - y + 3z = 1$$

$$x + 2y - z = 1$$

$$3x + 3y + z = 3$$

Систем је квадратни па покушавамо да га решимо Крамеровим правилом.

$$\begin{aligned}\Delta &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 2 + 3 + 9 - (18 - 3 - 1) = 0.\end{aligned}$$

Рачунамо детерминанте непознатих.

$$x - y + 3z = 1$$

$$x + 2y - z = 1$$

$$3x + 3y + z = 3$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Да ли је могло без рачунања?

Имамо случај $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z$. Систем морамо решити „ручно” (Гаусовим системом елиминације).

$$x - y + 3z = 1$$

$$x + 2y - z = 1$$

$$3x + 3y + z = 3$$

— — — — —

$$x - y + 3z = 1$$

$$3y - 4z = 0 \quad // - I$$

$$6y - 8z = 0 \quad III - 3I$$

— — — — —

$$x - y + 3z = 1$$

$$3y - 4z = 0$$

$$0z = 0 \quad III - 2II$$

Једна једначина је вишак (трећа). Зашто је вишак?

Остаје нам систем:

$$x - y + 3z = 1$$

$$3y - 4z = 0.$$

Овај систем има више променљивих него једначина.

Шта то значи?

Једну променљиву из друге једначине бирамо за параметар, рецимо z :

$$z = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Остале изражавамо преко ње:

$$3y - 4\alpha = 0 \Rightarrow y = \frac{4}{3}\alpha$$

$$x - \frac{4}{3}\alpha + 3\alpha = 1 \Rightarrow x = 1 - \frac{5}{3}\alpha.$$

Скуп решења система:

$$\left\{ \left(1 - \frac{5}{3}\alpha, \frac{4}{3}\alpha, \alpha \right) \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

Задатак

У зависности од реалног параметра a , испитати сагласност и решити систем линеарних једначина:

$$x + 2y + az = 2$$

$$3x - y + 2z = 0$$

$$4x + y + a^2z = a$$

И овај систем је квадратни, па ћемо покушати да искористимо Крамерово правило.

$$\begin{aligned}\Delta &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & a^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & a^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -a^2 + 16 + 3a - (-4a + 2 + 6a^2) = -7a^2 + 7a + 14 \\ &= -7(a^2 - a - 2) = -7(a - 2)(a + 1)\end{aligned}$$

$$x + 2y + az = 2$$

$$3x - y + 2z = 0$$

$$4x + y + a^2z = a$$

$$\begin{aligned}\Delta_x &= \begin{vmatrix} 2 & 2 & a \\ 0 & -1 & 2 \\ a & 1 & a^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & a \\ 0 & -1 & 2 \\ a & 1 & a^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -1 \\ a & 1 \end{vmatrix} \\ &= -2a^2 + 4a + 0 - (-a^2 + 4 + 0) = -a^2 + 4a - 4 \\ &= -(a^2 - 4a + 4) = -(a - 2)^2\end{aligned}$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & a & a^2 \end{vmatrix} = \dots = -(a - 2)(3a + 8)$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & a \end{vmatrix} = \dots = -7(a - 2)$$

Дакле, имамо:

$$\Delta = -7(a - 2)(a + 1),$$

$$\Delta_x = -(a - 2)^2,$$

$$\Delta_y = -(a - 2)(3a + 8),$$

$$\Delta_z = -7(a - 2).$$

Дискутујемо случајеве.

1 $a \notin \{-1, 2\}$

Тада је $\Delta \neq 0$ па систем има јединствено решење:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{a - 2}{7(a + 1)}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{3a + 8}{7(a + 1)},$$

$$z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{1}{a + 1}.$$

2 $a = -1$

Тада је $\Delta = 0$, али $\Delta_x = -9$. Систем нема решења.

3 $a = 2$

Сада је $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$. Систем или нема решења, или их има бесконачно много. Систем решавамо „ручно“.

$$\begin{array}{rcl} x + 2y + az = 2 & & x + 2y + 2z = 2 \\ 3x - y + 2z = 0 & \xrightarrow{a=2} & 3x - y + 2z = 0 \\ 4x + y + a^2z = a & & 4x + y + 4z = 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} x + 2y + 2z = 2 & & \\ -7y - 4z = -6 & II - 3I & \\ -7y - 4z = -6 & III - 4I & \\ \hline \end{array}$$

Трећа једначина је вишак.

Систем постаје:

$$\begin{aligned}x + 2y + 2z &= 2 \\ -7y - 4z &= -6\end{aligned}$$

Једну променљиву из друге једначине узимамо за параметар, рецимо z :

$$z = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Следи:

$$y = \frac{6 - 4\alpha}{7} = \frac{6}{7} - \frac{4}{7}\alpha$$

$$x = 2 - 2\left(\frac{6}{7} - \frac{4}{7}\alpha\right) - 2\alpha = \frac{2}{7} - \frac{6}{7}\alpha.$$

Скуп решења система:

$$\left\{ \left(\frac{2}{7} - \frac{6}{7}\alpha, \frac{6}{7} - \frac{4}{7}\alpha, \alpha \right) \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

Задатак

У зависности од реалног параметра a , испитати сагласност и решити систем линеарних једначина:

$$3x - 2y + 5z + au = 0$$

$$6x - ay + 4z + 3u = 0$$

$$9x - 6y + 3z + 2u = 0$$

Систем је **хомоген**, слободни чланови су нуле. Шта можемо рећи о скупу његових решења?

Систем има 3 једначине и 4 непознате, сигурно неће имати јединствено решење.

Решавамо га Гаусовим системом елиминације.

$$3x - 2y + 5z + au = 0$$

$$6x - ay + 4z + 3u = 0$$

$$9x - 6y + 3z + 2u = 0$$

— — — — —

$$3x - \quad 2y + \quad 5z + \quad au = 0$$

$$(4 - a)y - 6z + (3 - 2a)u = 0 \quad II - 2I$$

$$-12z + (2 - 3a)u = 0 \quad III - 3I$$

Разликујемо случајеве у којима друга и трећа једначина имају, односно немају исти број променљивих.

1 $a \neq 4$

Једну од две променљиве у последњој једначини узимамо за параметар; боље је z да не бисмо потенцијално делили нулом.

$$u = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Променљива z се може изразити преко овог параметра као $z = \frac{2-3a}{12}\alpha$. Вратимо у другу једначину да добијемо $y = -\frac{1}{2}\alpha$, а онда све то у прву да добијемо $x = \frac{3a-22}{36}\alpha$. У овом случају, скуп решења система је

$$\left\{ \left(\frac{3a-22}{36}\alpha, -\frac{1}{2}\alpha, \frac{2-3a}{12}\alpha, \alpha \right) \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

2

$$a = 4$$

Систем постаје

$$3x - 2y + 5z + 4u = 0$$

$$- 6z - 5u = 0$$

$$- 12z - 10u = 0$$

Трећа једначина је вишак јер је пропорционална са другом. Остаје нам систем

$$3x - 2y + 5z + 4u = 0$$

$$- 6z - 5u = 0$$

Овде је број једначина за 2 мањи од броја непознатих. Морамо узети два параметра:

$$u = \alpha, y = \beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Добијамо

$$z = -\frac{5}{6}\alpha, \quad x = \frac{1}{18}\alpha + \frac{2}{3}\beta.$$

Скуп решења система је у овом случају:

$$\left\{ \left(\frac{1}{18}\alpha + \frac{2}{3}\beta, \beta, -\frac{5}{6}\alpha, \alpha \right) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

Занимљиво је уочити да се у првом случају произвољно решење система могло записати као

$$\alpha \cdot \left(\frac{3a-22}{36}, \frac{1}{2}, \frac{2-3a}{12}, 1 \right),$$

а у другом случају као

$$\alpha \left(\frac{1}{18}, 0, -\frac{5}{6}, 1 \right) + \beta \left(\frac{2}{3}, 1, 0, 0 \right).$$

Овога ћемо се поново сетити код векторских простора.

Задатак

У зависности од реалних параметара a и b , испитати сагласност и решити систем линеарних једначина

$$2x - y + 3z = 2$$

$$x + 2y + z = -1$$

$$4x + 3y + az = 0$$

$$x - 3y + bz = a - 2$$

Ово је систем који има више једначина него непознатих. И њега решавамо Гаусовим системом елиминације.

За почетак, мудро је другу једначину посматрати као прву.

$$x + 2y + z = -1$$

$$2x - y + 3z = 2$$

$$4x + 3y + az = 0$$

$$x - 3y + bz = a - 2$$

— — — — —

$$x + 2y + z = -1$$

$$- 5y + z = 4 \quad // - 2I$$

$$- 5y + (a - 4)z = 4 \quad III - 4I$$

$$- 5y + (b - 1)z = a - 1 \quad IV - I$$

$$x + 2y + z = -1$$

$$-5y + z = 4$$

$$(a - 5)z = 0 \quad III - II$$

$$(b - 2)z = a - 5 \quad IV - II$$

Сада дискутујемо. Одмах видимо да ако је $a = 5$, систем нема решења, јер је трећа једначина у контрадикцији са четвртом. Ако је $a \neq 5$, онда је четврта једначина облика $(b - 2)z = 0$, па за $b \neq 2$ има јединствено решење $z = 0$, а за $b = 2$ је сувишна. Сада то запишимо.

1 $a \neq 5$ Систем нема решења.

2 $a = 5, b \neq 2$ Систем је тада

$$\begin{aligned}x + 2y + z &= -1 \\ -5y + z &= 4, \\ z &= 0\end{aligned}$$

па се директним решавањем добије
 $(x, y, z) = (3/5, -4/5, 0)$.

3 $a = 5, b = 2$ Систем је тада

$$\begin{aligned}x + 2y + z &= -1 \\ -5y + z &= 4.\end{aligned}$$

Увођењем z као параметра [...] добија се да је скуп
решења система

$$\left\{ \left(\frac{3}{5} - \frac{7}{5}\alpha, -\frac{4}{5} + \frac{1}{5}\alpha, \alpha \right) \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

Добра је пракса на крају поново написати коначно решење, због прегледности. Природа и решења система по случајевима су:

- 1 $a \neq 5$ Систем нема решења.
- 2 $a = 5, b \neq 2$ Систем има јединствено решење $(x, y, z) = (3/5, -4/5, 0)$.
- 3 $a = 5, b = 2$ Систем има бесконачно много решења и скуп решења система је

$$\left\{ \left(\frac{3}{5} - \frac{7}{5}\alpha, -\frac{4}{5} + \frac{1}{5}\alpha, \alpha \right) \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

Решавамо систем једначина са n непознатих.

Поред матрице система A , формирамо и проширену матрицу система, A_p , тако што на A додамо колону слободних чланова.

Теорема

- 1 Ако је $r(A) = r(A_p) = n$, систем има јединствено решење.
- 2 Ако је $r(A) = r(A_p) < n$, онда систем има бесконачно много решења.
- 3 Ако је $r(A) < r(A_p)$, систем нема решења.

Ова теорема може се користити када се одговара на питање природе система, а не траже се сама решења.

M1
Вежба 2

Данијел
Алексић

Системи
линеарних
једначина

Крамерово
правило

1. задатак

2. задатак

3. задатак

4. задатак

5. задатак

Кронекер-
Капелијева
теорема

Методичка збирка решених задатака из Математике 1.
Оливера Мухић, Владимир Балтић, Марија Боричић.
ФОН, Београд, 2022.