Математика 1
Вежбе 5

Данијел Алексић

Универзитет у Београду
Факултет организационих наука

2023.

Нека је V непразан скуп, нека је K поље и нека су $+ : V \times V \to V$ и $\cdot : K \times V \to V$ операције.

Знамо ли шта је поље?

Дефиниција

Алгебарска структура $(V, K, +, \cdot)$ је векторски простор ако је за све $\alpha, \beta \in K$ и све $x, y \in V$

1. $(V, +)$ Абелова група;
2. $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$;
3. $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$;
4. $(\alpha\beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x)$;
5. $1 \cdot x = x$.

Линеарна комбинација, линеарна независност

Дефиниција

Линеарна комбинација вектора $x_1, \dots, x_n$ из V јесте вектор $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n$, где су $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ скалари из K.

Дефиниција

Линеарни омотач (линеал) скупа вектора $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ јесте скуп свих линеарних комбинација вектора $x_1, \dots, x_n$.
Ознака: $L(X)$.
Ако је A неки скуп вектора и $L(X) = A$, кажемо да је X *генераторски скуп* за A.

Дефиниција

Вектори $x_1, \dots, x_n$ векторског простора V су *линеарно зависни* ако постоје скалари $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ из K, од којих је барем један различит од нуле и за које важи

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0.$$

У супротном, вектори су линеарно независни.

База и димензија

Како се тумаче линеарна зависност и независност у практичном смислу?

Дефиниција

Скуп вектора из V чини базу уколико је линеарно независан и генерише V.
Број елемената базе јесте *димензија* векторског простора.
Просторе са бесконачним базама зовемо *бесконачнодимензиони простори*.

За добру дефинисаност неопходно је показати да све базе имају исти број елемената.

Задатак

Нека је $\mathbb{R}^3 = \{(a_1, a_2, a_3) \mid a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$ и нека је $+$ операција дефинисана једнакошћу

$$(a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3).$$

Нека је $\cdot$ операција дефинисана са

$$\lambda \cdot (a_1, a_2, a_3) = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3),$$

где је $\lambda \in \mathbb{R}$.

(а) Доказати да је $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, \cdot)$ векторски простор.

(б) Доказати да вектори $\vec{e}_1 = (2, 1, -3)$, $\vec{e}_2 = (3, 2, -5)$ и $\vec{e}_3 = (1, -1, 1)$ чине базу у $\mathbb{R}^3$ и изразити вектор $\vec{x} = (6, 2, -7)$ помоћу вектора те базе.

Ознаке са стрелицама углавном су резервисане за векторе из простора $\mathbb{R}^n$.

Део (а):

Решавамо део (б). Да би вектори $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$ чинили базу, треба да су линеарно независни и да генеришу $\mathbb{R}^3$.

Линеарну независност показујемо по дефиницији: једначина (по α, β, γ)

$$\alpha \cdot \vec{e}_1 + \beta \cdot \vec{e}_2 + \gamma \cdot \vec{e}_3 = \vec{0}$$

треба да има јединствено решење $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Распишемо.

$$\alpha(2, 1, -3) + \beta(3, 2, -5) + \gamma(1, -1, 1) = (0, 0, 0),$$

односно

$$(2\alpha + 3\beta + \gamma, \alpha + 2\beta - \gamma, -3\alpha - 5\beta + \gamma) = (0, 0, 0).$$

Добијамо систем једначина

$$\begin{aligned} 2\alpha + 3\beta + \gamma &= 0 \\ \alpha + 2\beta - \gamma &= 0 \\ -3\alpha - 5\beta + \gamma &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2\alpha + 3\beta + \gamma &= 0 \\ \alpha + 2\beta - \gamma &= 0 \\ -3\alpha - 5\beta + \gamma &= 0. \end{aligned}$$

Начин 1 [мозак off]: Решимо систем и констатујемо да му је $(0,0,0)$ једино решење.
Начин 2 [мозак on]: Систем је хомоген, па сигурно има $(0,0,0)$ као решење. Детерминанта система је

$$\Delta = \left| \begin{array}{ccc|cc} 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ -3 & -5 & 1 & -3 & -5 \end{array} \right| = 4+9-5-(-6+10+3) = 1 \neq 0,$$

па систем има јединствено решење по Крамеру, па оно мора бити $(0,0,0)$, јер је то већ решење.
Дакле, вектори $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$ јесу линеарно независни.
Како бисмо ово тврђење доказали употребом матрица?

Знамо да је ранг матрице једнак максималном броју њених линеарно независних врста/колона.
Направимо матрицу од вектора $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$ и рачунамо јој ранг.

$$\begin{array}{c} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{array} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \overset{V_3 \text{ на поч.}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\overset{-||-}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 5 & -8 \end{bmatrix} \overset{-||-}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Ранг је очигледно 3, па изводимо исти закључак.

Дакле, вектори $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ и $\vec{e_3}$ су линеарно независни. Да би чинили базу, треба још показати да генеришу $\mathbb{R}^3$, тј. да се **произвољан** вектор из $\mathbb{R}^3$ може записати као њихова линеарна комбинација. Означимо тај произвољан вектор са $\vec{v} = (a, b, c)$.
Ваља показати да једначина

$$\vec{v} = \alpha\vec{e_1} + \beta\vec{e_2} + \gamma\vec{e_3}$$

има макар једно решење (α, β, γ). Распишемо:

$$(a, b, c) = \alpha(2, 1, -3) + \beta(3, 2, -5) + \gamma(1, -1, 1),$$

односно

$$(2\alpha + 3\beta + \gamma, \alpha + 2\beta - \gamma, -3\alpha - 5\beta + \gamma) = (a, b, c),$$

односно:

$$
\begin{aligned}
2\alpha + 3\beta + \gamma &= a\\
\alpha + 2\beta - \gamma &= b\\
-3\alpha - 5\beta + \gamma &= c.
\end{aligned}
$$

Овај систем има исту детерминанту као онај малопре, и знамо да она није нула. Следи да важи оно што смо хтели, па смо доказали да $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$ чине базу.
Остаје још да вектор $\vec{x} = (6, 2, -7)$ запишемо у тој бази.
Истим расписом добијамо

$$(6, 2, -7) = \alpha(2, 1, -3) + \beta(3, 2, -5) + \gamma(1, -1, 1),$$

односно систем

$$
\begin{aligned}
2\alpha + 3\beta + \gamma &= 6\\
\alpha + 2\beta - \gamma &= 2\\
-3\alpha - 5\beta + \gamma &= -7
\end{aligned}
$$

чије је јединствено решење [...] $(\alpha, \beta, \gamma) = (1, 1, 1)$. Дакле, $\vec{x} = 1 \cdot \vec{e}_1 + 1 \cdot \vec{e}_2 + 1 \cdot \vec{e}_3$.

Задатак

Дати су вектори $\vec{e}_1 = (p, 0, 1)$, $\vec{e}_2 = (2, -1, 3)$ и $\vec{e}_3 = (1, 1, -2)$ у $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, \cdot)$.

(a) Одредити за које вредности реалног параметра p су дати вектори линеарно независни.

(б) 🏠 За $p = 4$ испитати да ли дати вектори чине базу датог векторског простора. Уколико чине, одредити координате вектора $(1, 2, -1)$ у тој бази.

Решавамо само део (а); део (б) смо већ решавали, само са другим бројевима.

Проверавамо линеарну независност три вектора. То је еквивалентно томе да матрица

$$\begin{bmatrix} p & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

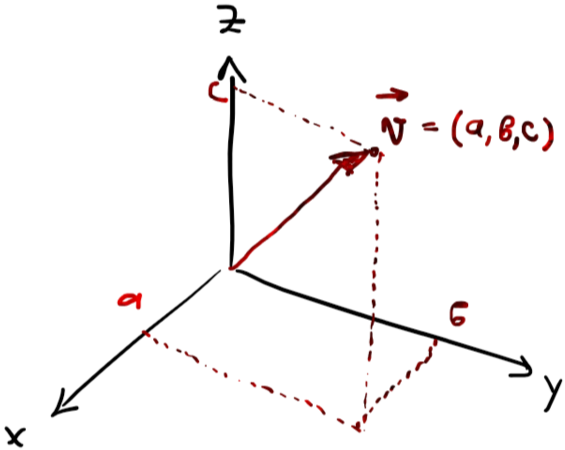
има ранг 3. Али, како је она квадратна реда 3, то је еквивалентно томе да је њена детерминанта различита од нуле. Рачунамо:

$$\begin{vmatrix} p & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \left|\begin{array}{ccc|cc} p & 0 & 1 & p & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right|$$

$$= 2p + 0 + 2 - (-1 + 3p + 0) = -p + 3.$$

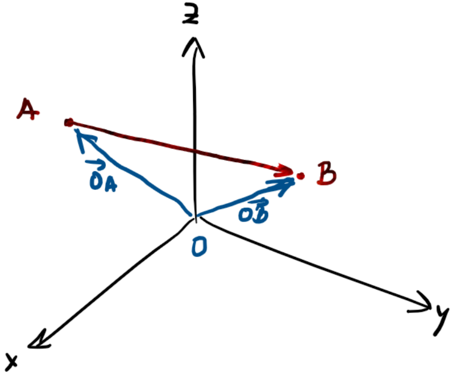
За $p \neq 3$ је ова детерминанта различита од нуле, и тада су посматрани вектори линеарно независни.

Вектор поистовећујемо с тачком.



$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

Које координате имају $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OA}$?

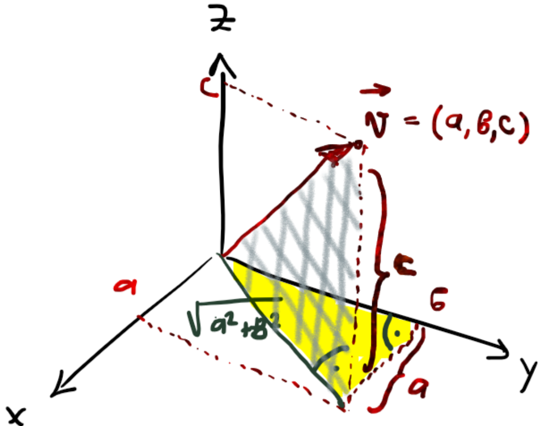


Интензитет вектора

Нека имамо вектор $\vec{v} = (a, b, c)$ у $\mathbb{R}^3$. Његов *интензитет* јесте његово растојање од координатног почетка.

$$|\vec{v}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Објаснити зашто са слике.



Производи вектора у $\mathbb{R}^3$

Скаларни, векторски и мешовити производ.

За сваки од њих дискутоваћемо три ствари:

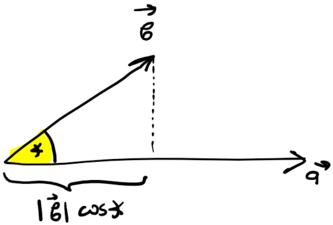
- Како је дефинисан?
- Како се рачуна у координатама?
- Чега је критеријум?

Нека су у $\mathbb{R}^3$ дати вектори $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$.

Дефиниција

Скаларни производ вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ једнак је производу интензитета првог вектора и дужине пројекције другог на први, односно

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\ |\vec{b}| \cos \measuredangle(\vec{a}, \vec{b}).$$



Скаларни производ у координатама

Скаларни производ у координатама:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

Уверити се са слике, неформално, да је наредна теорема тачна.

Теорема

Два не-нула вектора у $\mathbb{R}^3$ су ортогонална ако и само ако је њихов скаларни производ једнак нули.

Скаларни производ два ВЕКТОРА је БРОЈ.

Задатак

Дати су вектори $\vec{u} = (6, 1, 1)$, $\vec{v} = (0, 3, -1)$ и $\vec{w} = (-2, 3, 5)$. Одредити $t \in \mathbb{R}$ тако да вектори $\vec{u} + t\vec{v}$ и $\vec{w}$ буду ортогонални.

Тражимо t за које је

$$(\vec{u} + t\vec{v}) \cdot \vec{w} = 0,$$

односно

$$((6, 1, 1) + t(0, 3, -1)) \cdot (-2, 3, 5) = 0$$

$$(6, 1 + 3t, 1 - t) \cdot (-2, 3, 5) = 0$$

$$-12 + 3 + 9t + 5 - 5t = 0$$

$$-4 + 4t = 0$$

$$t = 1$$

За $t = 1$ су вектори $\vec{u} + t\vec{v}$ и $\vec{w}$ ортогонални.

Задатак

Израчунати меру угла који граде вектори $\vec{a} = (7, 2, -1)$ и $\vec{b} = (1, 2, -3)$.

Имамо да је

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \measuredangle(\vec{a}, \vec{b}),$$

односно

$$\cos \measuredangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{(7, 2, -1) \cdot (1, 2, -3)}{\sqrt{7^2 + 2^2 + (-1)^2}\sqrt{1^2 + 2^2 + (-3)^2}}$$
$$= \frac{7 + 4 + 3}{\sqrt{54}\sqrt{14}} = \sqrt{\frac{7}{27}}.$$

Дакле, $\measuredangle(\vec{a}, \vec{b}) = \arccos \sqrt{\frac{7}{27}}$.

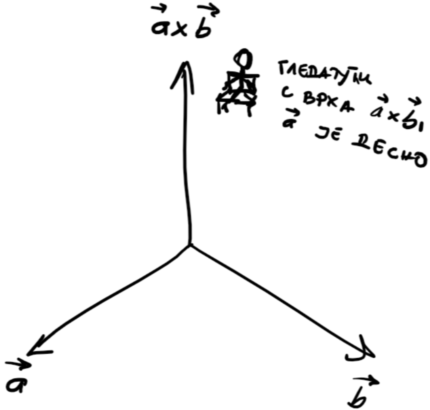
Нека су у $\mathbb{R}^3$ дати вектори $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$.

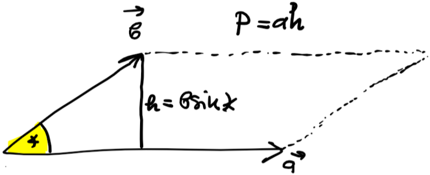
Дефиниција

Векторски производ вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ јесте вектор $\vec{a} \times \vec{b}$ који има:

- Правац ортогоналан и на $\vec{a}$ и на $\vec{b}$;
- Смер такав да $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{a} \times \vec{b}$ чине **десну тројку** (правило десне руке, десног завртња)
- Интензитет једнак површини паралелограма над векторима $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin \measuredangle(\vec{a}, \vec{b})$$


$\vec{a} \times \vec{b}$
ГЛЕДАЈУЋИ С ВРХА $\vec{a} \times \vec{b}$, $\vec{a}$ ЈЕ ДЕСНО
$\vec{a}$
$\vec{b}$


$\vec{b}$
$P = ah$
$h = b \sin \alpha$
α
$\vec{a}$

Векторски производ у координатама

$\vec{i} = (1,0,0)$, $\vec{j} = (0,1,0)$, $\vec{k} = (0,0,1)$. Векторски производ је **формална детерминанта**:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Неформално, са слике, уверити се да наредна теорема важи.

Теорема

Два не-нула вектора у $\mathbb{R}^3$ су колинеарна ако и само ако је њихов векторски производ једнак нули.

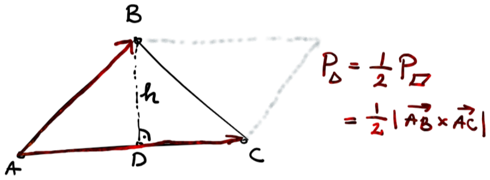
Векторски производ два вектора је ВЕКТОР.

Φ H

5. задатак

Задатак

Наћи површину и дужину висине BD троугла ΔABC ако је $A(-3,-2,0)$, $B(3,-3,1)$ и $C(5,0,2)$.



$$\overrightarrow{AB} = B - A = (6,-1,1), \qquad \overrightarrow{AC} = C - A = (8,2,2).$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & -1 & 1 \\ 8 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 6 & -1 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= (-4,-4,20)$$

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}\sqrt{16+16+400} = \frac{1}{2}\sqrt{432}.$$

Данијел
Алексић

С друге стране,

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}| \cdot h,$$

односно

$$h = \frac{2P_{\Delta ABC}}{|\overrightarrow{AC}|} \frac{\sqrt{432}}{\sqrt{64+4+4}} = \frac{12\sqrt{3}}{6\sqrt{2}} = \sqrt{6}.$$

Мешовити производ

Нека имамо векторе $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ и $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ у $\mathbb{R}^3$.

Дефиниција

Мешовити производ вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ (тим редом) дефинише се као

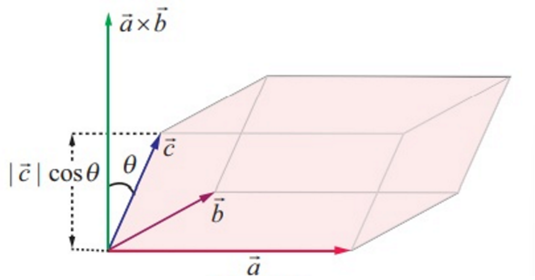
$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}).$$

Мешовити производ три вектора је БРОЈ.

Мешовити производ у координатама

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Уверити се, неформално, са слике, да је доње тачно.



$$V_{\text{паралелепипеда}} = |[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|$$

$$V_{\text{тетраедра}} = \frac{1}{6}|[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|$$

Теорема

Три не-нула вектора су копланарна ако и само ако је њихов мешовити производ једнак нули.

6. и 7. задатак (⌂)

Задатак

Израчунати запремину тетраедра и паралелепипеда над векторима $\vec{a} = (1, 2, 3)$, $\vec{b} = (2, 2, 0)$ и $\vec{c} = (0, 2, 2)$.

Задатак

Испитати да ли су вектори $\vec{a} = (1, 2, 3)$, $\vec{b} = (4, 1, 1)$ и $\vec{c} = (-9, 3, 6)$ копланарни, а ако јесу изразити вектор $\vec{c}$ преко остала два.
(Хинт: Поставити систем једначина $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$)