Матричне једначине
1. задатак
2. задатак
Ранг матрице
3. задатак
4. задатак
5. задатак
6. задатак

Математика 1
Вежбе 3

Данијел Алексић

Универзитет у Београду
Факултет организационих наука

2023

М1
Вежбе 2

Данијел
Алексић

Матричне једначине
1. задатак
2. задатак
Ранг матрице
3. задатак
4. задатак
5. задатак
6. задатак

- Једначине у којима је **непозната матрица**
- Облика $AX = B$ или се своди на њега

Задатак

Решити матричну једначину $(M^{-1}X)^{-1} + 2M = B$, ако је

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 6 & -1 \end{bmatrix}.$$

Трансформишемо једначину:

$$\begin{aligned} (M^{-1}X)^{-1} &= B - 2M \quad /^{-1} \\ M^{-1}X &= (B - 2M)^{-1} \quad /M \cdot \llcorner\!\lrcorner \\ X &= M(B - 2M)^{-1} \end{aligned}$$

Матричне једначине

1. задатак

2. задатак

Ранг матрице

3. задатак

4. задатак

5. задатак

6. задатак

$$B - 2M = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 6 & -1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 6 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 6 & -4 \\ 2 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\det(B - 2M) = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right|$$

$$= 3 + 1 + 0 - (6 + 0 + 0) = -2$$

$$B-2M=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 3 & -1\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Рачунамо адјунговану матрицу од $B-2M$.

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}3 & -1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=3 \qquad A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}0 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-1 \qquad A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}0 & 3\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-3$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1 \qquad A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-1 \qquad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-1$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 3 & -1\end{vmatrix}=-5 \qquad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{vmatrix}=1 \qquad A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & 3\end{vmatrix}=3$$

$$\mathrm{Cof}(B-2M)=\begin{bmatrix}3 & -1 & -3\\ 1 & -1 & -1\\ -5 & 1 & 3\end{bmatrix}, \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Adj}(B-2M)=\begin{bmatrix}3 & 1 & -5\\ -1 & -1 & 1\\ -3 & -1 & 3\end{bmatrix},$$

$$\Rightarrow \quad (B-2M)^{-1}=\frac{1}{\det(B-2M)}\mathrm{Adj}(B-2M)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}3 & 1 & -5\\ -1 & -1 & 1\\ -3 & -1 & 3\end{bmatrix}.$$

Решавамо једначину.

$$
\begin{aligned}
X &= M(B-2M)^{-1} \\
&= -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 & -5 \\ -1 & -1 & 1 \\ -3 & -1 & 3 \end{bmatrix} \\
&= -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3-3+6 & 1-3+2 & -5+3-6 \\ 3+1-6 & 1+1-2 & -5-1+6 \\ -3-3+3 & -1-3+1 & 5+3-3 \end{bmatrix} \\
&= -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 6 & 0 & -8 \\ -2 & 0 & 0 \\ -3 & -3 & 5 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Коначно решење:

$$
X = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}.
$$

M1
Вежбе 2

Данијел
Алексић

Матричне једначине
1. задатак
2. задатак
Ранг матрице
3. задатак
4. задатак
5. задатак
6. задатак

Задатак

Ако је

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & a \end{bmatrix} \;\middle|\; a, b, c \in \mathbb{Q},\ c \neq 0,\ |a| \neq |b| \right\}$$

и $*$ операција множења матрица, испитати да ли је $(\mathcal{A}, *)$ Абелова група.

1. **Затвореност.** Нека су $A = \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & a \end{bmatrix}$ и

   $B = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & \beta \\ 0 & \gamma & 0 \\ \beta & 0 & \alpha \end{bmatrix}$ матрице из $\mathcal{A}$ (**шта то значи?**).

$$
\begin{aligned}
A * B = AB &= \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & 0 & \beta \\ 0 & \gamma & 0 \\ \beta & 0 & \alpha \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a\alpha + b\beta & 0 & a\beta + b\alpha \\ 0 & c\gamma & 0 \\ b\alpha + a\beta & 0 & b\beta + a\alpha \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a\alpha + b\beta & 0 & a\beta + b\alpha \\ 0 & c\gamma & 0 \\ a\beta + b\alpha & 0 & a\alpha + b\beta \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Јасно, $c\gamma \neq 0$ јер $c \neq 0$ и $\gamma \neq 0$. Морамо проверити да је $|a\alpha + b\beta| \neq |a\beta + b\alpha|$. **Изостављамо дискусију:** (1) $a, b, \alpha, \beta > 0$, (2) $a, b, \alpha > 0, \beta < 0$ итд. *Може и на испиту овако.* Затвореност важи.

5. **Комутативност.** Важи јер је множење реалних бројева комутативно (*видети рачун на претходном слајду*).
2. **Асоцијативност.** Важи јер је множење матрица асоцијативно.
3. **Постојање неутрала.** *Углавном* је у матричним структурама јединична матрица неутрал, па има смисла покушати с њом.

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$1, 0 \in \mathbb{Q}, 1 \neq 0, |1| \neq |0|$. Следи, да $E \in \mathcal{A}$. Како знамо да за матрицу E важи својство неутрала, закључујемо да је E неутрал у структури $\mathcal{A}$. Неутрал постоји.
/*Наћи пример матричне структуре која је затворена, асоцијативна и има неутрал, али неутрал није јединична матрица. */

4 **Постојање инверза.** Нека је

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & a \end{bmatrix} \in \mathcal{A}$$

произвољна. Имамо да је (развој по 2. врсти)

$$\det(A) = c(a^2 - b^2) \neq 0,$$

јер $c \neq 0$ и $|a| \neq |b|$, па и $a^2 \neq b^2$.
На основу познате теореме, A има инверз. Како је A било произвољно сваки елемент у $\mathcal{A}$ има инверз. (Овај део је фалио!) Али, то не значи да је тај инверз у $\mathcal{A}$. Директан рачун показује да је инверз матрице A матрица

$$\begin{bmatrix} \frac{a}{a^2-b^2} & 0 & \frac{-b}{a^2-b^2} \\ 0 & \frac{1}{c} & 0 \\ \frac{-b}{a^2-b^2} & 0 & \frac{a}{a^2-b^2} \end{bmatrix}$$

која припада $\mathcal{A}$.
$\mathcal{A}$ јесте Абелова група.

М1
Вежбе 2

Данијел
Алексић

Матричне једначине
1. задатак
2. задатак
Ранг матрице
3. задатак
4. задатак
5. задатак
6. задатак

Дефиниција

Ранг матрице једнак је максималном броју њених линеарно независних врста, или колона.

Дефиниција *није оперативна*, желимо да сазнамо како да рачунамо ранг у пракси.

Елементарне трансформације:

1. $V_i \leftrightarrow V_j$ (замена врста)
2. $V_i \leftrightarrow \alpha V_i$, $\alpha \neq 0$ (множење врсте скаларом)
3. $V_i \leftrightarrow V_i + \alpha V_j$ (множење врсте скаларом и додавање другој врсти)

Исто важи и за колоне.

Теорема

Елементарне трансформације не мењају ранг.

Ранг матрице - шта радимо у пракси

Примењујемо елементарне трансформације док не добијемо матрицу облика

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \boxed{1} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \boxed{1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Број јединица = ранг

У пракси: заустављамо се раније (нпр. кад?)

М1
Вежбе 2

Данијел
Алексић

Матричне једначине
1. задатак
2. задатак
Ранг матрице
3. задатак
4. задатак
5. задатак
6. задатак

Задатак

Одредити ранг матрице

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Вршимо елементарне трансформације.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{bmatrix} \underset{\sim}{V_1 \leftrightarrow V_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$
= \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{bmatrix} \underset{\sim}{\substack{V_2 \leftarrow V_2 - 2V_1 \\ V_4 \leftarrow V_4 - 4V_1}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 12 & -3 \end{bmatrix}
$$

$$
\underset{\sim}{V_2 \leftrightarrow V_3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 12 & -3 \end{bmatrix} \underset{\sim}{V_4 \leftarrow V_4 - V_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & -4 \end{bmatrix}
$$

$$
\underset{\sim}{V_4 \leftarrow V_4 - V_3} \begin{bmatrix} \boxed{1} & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 9 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

Овде можемо стати (зашто?).

$$
r(A) = 3.
$$

4. задатак

Задатак

Одредити ранг матрице

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -a \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & -a & -1 \end{bmatrix}$$

у зависности од реалног параметра a.

Вршимо елементарне трансформације.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -a \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & -a & -1 \end{bmatrix} \overset{V_1 \leftrightarrow V_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -a \\ 3 & -a & -1 \end{bmatrix}$$

$$\overset{\substack{V_2 \leftarrow V_2 - 2V_1 \\ V_3 \leftarrow V_3 - 3V_1}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & 2-a \\ 0 & -9-a & 2 \end{bmatrix} \overset{\substack{K_2 \leftarrow K_2 - 3K_1 \\ K_3 \leftarrow K_3 + K_1}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 2-a \\ 0 & -9-a & 2 \end{bmatrix}$$

$$\overset{K_3 \leftarrow -\frac{2-a}{-5} K_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & -9-a & \frac{1}{5}(-9-a)(2-a)+2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & -9-a & \frac{1}{5}(a-1)(a+8) \end{bmatrix}$$

$$\overset{V_2 \leftarrow V_2/(-5)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -9-a & \frac{1}{5}(a-1)(a+8) \end{bmatrix} \overset{V_3 \leftarrow V_3 + (9+a)V_2}{\sim}$$

$$\overset{V_3 \leftarrow V_3 + (9+a)V_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5}(a-1)(a+8) \end{bmatrix}$$

$$\overset{V_3 \leftarrow V_3/5}{\sim} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{(a-1)(a+8)} \end{bmatrix}$$

Ранг зависи од тога да ли је $(a-1)(a+8)$ нула или не.

$$r(A) = \begin{cases} 3, & a \notin \{-8, 1\}, \\ 2, & a \in \{-8, 1\}. \end{cases}$$

Да ли је могло на други начин? Јесте.

A је квадратна матрица. Она је максималног ранга **акко** је $\det(A) \neq 0$; али, $\det(A) = (a-1)(a+8)$. Онда се два случаја испитају ручно.

М1
Вежбе 2

Данијел
Алексић

Матричне једначине
1. задатак
2. задатак
Ранг матрице
3. задатак
4. задатак
5. задатак
6. задатак

Задатак

Одредити ранг матрице

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & 2 & 1 \\ 1 & 2a-1 & 3 & 1 \\ 1 & 3a-2 & b+1 & b-2 \end{bmatrix}$$

у зависности од реалних параметара a и b.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & 2 & 1 \\ 1 & 2a-1 & 3 & 1 \\ 1 & 3a-2 & b+1 & b-2 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\substack{V_2 \leftarrow V_2 - V_1 \\ V_3 \leftarrow V_3 - V_1}} \begin{bmatrix} 1 & a & 2 & 1 \\ 0 & a-1 & 1 & 0 \\ 0 & 2a-2 & b-1 & b-3 \end{bmatrix} \underset{\sim}{V_3 \leftarrow V_3 - 2V_2}$$

$$\overset{V_3 \leftarrow V_3 - 2V_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & a & 2 & 1 \\ 0 & a-1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b-3 & b-3 \end{bmatrix}$$

$$\overset{-||-}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a-1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b-3 & b-3 \end{bmatrix} \overset{K_3 \leftarrow K_3 - K_4}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a-1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b-3 \end{bmatrix}$$

$$\overset{K_2 \leftarrow K_2 - (a-1)K_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b-3 \end{bmatrix} \overset{K_2 \text{ на крај}}{\sim} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{b-3} & 0 \end{bmatrix}$$

$$r(A) = \begin{cases} 3, & b \neq 3, \\ 2, & b = 3. \end{cases}$$

Ранг не зависи од параметра a.

М1
Вежбе 2

Данијел
Алексић

Матричне једначине
1. задатак
2. задатак
Ранг матрице
3. задатак
4. задатак
5. задатак
6. задатак

Задатак (Фебруар 2023)

У зависности од параметра $\alpha \in \mathbb{R}$ одредити ранг матрице

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & \alpha & 4 & 7 \\ 3 & 6 & 2 & \alpha - 4 \\ 2 & 5 & 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & \alpha & 4 & 7 \\ 3 & 6 & 2 & \alpha - 4 \\ 2 & 5 & 3 & 5 \end{bmatrix} \underset{\substack{V_2 \leftarrow V_2 - 3V_1 \\ V_3 \leftarrow V_3 - 3V_1 \\ V_4 \leftarrow V_4 - 2V_1}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & \alpha - 6 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & \alpha - 10 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$
\overset{-||-}{\sim}
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \alpha - 6 & 1 & 1 \\
0 & 0 & -1 & \alpha - 10 \\
0 & 1 & 1 & 1
\end{bmatrix}
\overset{V_2 \to V_3 \to V_4 \to V_2}{\sim}
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & \alpha - 6 & 1 & 1 \\
0 & 0 & -1 & \alpha - 10
\end{bmatrix}
$$

$$
\overset{V_3 \leftarrow V_3 - (\alpha - 6) V_2}{\sim}
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 7 - \alpha & 7 - \alpha \\
0 & 0 & -1 & \alpha - 10
\end{bmatrix}
\overset{-||-}{\sim}
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 7 - \alpha & 7 - \alpha \\
0 & 0 & -1 & \alpha - 10
\end{bmatrix}
$$

$$
\overset{V_3 \leftrightarrow V_4}{\sim}
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & \alpha - 10 \\
0 & 0 & 7 - \alpha & 7 - \alpha
\end{bmatrix}
\overset{V_4 \leftarrow V_4 + (7 - \alpha) V_3}{\sim}
$$

$$
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & \alpha - 10 \\
0 & 0 & 0 & (7 - \alpha)(\alpha - 9)
\end{bmatrix}
\overset{-||-}{\sim}
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & (7 - \alpha)(\alpha - 9)
\end{bmatrix}
$$

Матричне једначине
1. задатак
2. задатак
Ранг матрице
3. задатак
4. задатак
5. задатак
6. задатак

$$r(A) = \begin{cases} 3, & \alpha \notin \{7, 9\}, \\ 2, & \alpha \in \{7, 9\} \end{cases}$$

Литература

Матричне
једначине
1. задатак
2. задатак
Ранг
матрице
3. задатак
4. задатак
5. задатак
6. задатак

Методичка збирка решених задатака из Математике 1.
Оливера Михић, Владимир Балтић, Марија Боричић.
ФОН, Београд, 2022.