МАТЕМАТИКА 3

Први колоквијум, новембар 2017 - 4. група

Драган Ђорић

1. За једначину

$$(2xy + y^2)dx + (2xy + x^2 - 2x^2y^2 - 2xy^3)dy = 0$$

одредити интеграциони фактор $\lambda(y)$, а затим решити једначину.

Решење. Дата једначина је облика $Adx + Bdy = 0$ и није једначина са тоталним диференцијалом јер није $A'_y = B'_x$. Пошто се у задатку тражи да се одреди интеграциони фактор облика $\lambda(y)$ (то ваљда значи да такав постоји!), нова једначина је $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$, где је $P = \lambda A$ и $Q = \lambda B$. Из услова $P'_y = Q'_x$ и једнакости

$$P'_y = \lambda' A + \lambda A'_y = \lambda' A + \lambda(2x + 2y), \quad Q'_x = \lambda B'_x = \lambda(2y + 2x - 4xy^2 - 2y^2)$$

следи да је

$$\lambda' A = -\lambda(4xy^2 + 2y^3) = -2\lambda y(2xy + y^2) = -2\lambda y A.$$

Одавде, за $A \neq 0$ имамо диференцијалну једначину $\lambda' = -2\lambda y$ из које одређујемо интеграциони фактор $\lambda \neq 0$. Како је $d\lambda/\lambda = -2ydy$, једно решење за λ је $\lambda(y) = e^{-y^2}$.

Сада, дакле, имамо једначину са тоталним диференцијалом

$$(2xy + y^2)e^{-y^2}dx + (2xy + x^2 - 2x^2y^2 - 2xy^3)e^{-y^2}dy = 0.$$

То значи да постоји функција $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ таква да је

$$u'_x = (2xy + y^2)e^{-y^2}, \quad u'_y = (2xy + x^2 - 2x^2y^2 - 2xy^3)e^{-y^2}. \tag{1}$$

Када одредимо функцију u, онда смо практично решили задатак јер из једнакости $du = 0$ имамо да је $u(x, y) = C$ опште решење дате једначине.

Како да одредимо функцију u? На располагању имамо две једнакости из (1). Из прве једнакости следи да је

$$u(x, y) = \int u'_x(x, y)dx + \varphi(y) = \int (2xy + y^2)e^{-y^2}dx + \varphi(y) = (x^2y + xy^2)e^{-y^2} + \varphi(y).$$

Из ове једнакости добијамо да је

$$u'_y = (x^2 - 2x^2y^2 + 2xy - 2xy^3)e^{-y^2} + \varphi'(y).$$

Поређењем овог израза за u'_y и оног из (1) видимо да је $\varphi'(y) = 0$, односно да је $\varphi(y) = D \in \mathbb{R}$.

Према томе, имамо да је

$$u(x,y) = xy(x+y)e^{-y^2} + D,$$

што значи да је опште решење дате једначине $xy(x+y) = Ce^{y^2}$, где је $C \in \mathbb{R}$.

Напомена. Наведеним поступком можемо да одредимо функцију u у општем случају, односно за једначину са тоталним диференцијалом $Pdx + Qdy = 0$. У том случају имаћемо да је

$$u(x,y) = \int P(x,y)dx + \varphi(y), \tag{2}$$

при чему за $\varphi(y)$ важи[1]

$$\varphi'(y) = Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)dx. \tag{3}$$

Из једнакости (2) и (3) следи да је

$$u(x,y) = \int P(x,y)dx + \int \left[Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)dx\right] dy. \tag{4}$$

Коришћењем ове формуле решавање једначине са тоталним диференцијалом се своди на налажење три интеграла и то олакшава решавање једначине. Међутим, када се полаже испит, није довољно само упамтити и користити формулу (4) јер се на тај начин задатак обезвређује. Наиме, студент помоћу те формуле може да добије решење задатка а да при томе не зна како је та формула настала. Штавише, не мора ништа да зна ни о једначини са тоталним диференцијалом, осим да је $u(x,y) = C$ њено опште решење.

Према томе, ко жели на испиту да користи формулу за $u(x,y)$ треба најпре да је изведе. У конкретном случају, поступак извођења формуле за u је практично решавање дате једначине и то је управо урађено у решавању задатка са овог колоквијума.

[1]Видети једнакост (43) на страни 32 уџбеника М. Стојановић, Р. Лазовић, О. Михић, Д. Ђорић, *Математика 3*, ФОН, 2015

2. Одредити партикуларно решење диференцијалне једначине

$$yy'' = y'(1-2y')$$

ако је $y(0) = 2$ и $y'(0) = 3/2$.

Решење. Дата једначина је облика $F(y, y', y'') = 0$ и она се сменом $z(y) = y'$ своди на једначину првог реда $G(y, z, z') = 0$.

Из $z(y) = y'$ следи да је $y''(x) = z'(y) \cdot y'(x) = z'z$, па се дата једначина своди на једначину првог реда

$$yzz' = z(1-2z).$$

Једно решење ове једначине је $z = 0$, односно $y' = 0$, али оно не испуњава дате услове. Случај $1 - 2z = 0$ и $y = 0$ није могућ. За $z(1-2z)y \neq 0$ имамо једначину

$$\frac{dz}{1-2z} = \frac{dy}{y}$$

која раздваја променљиве. Опште решење ове једначине је $z = \dfrac{1}{2} + \dfrac{C}{y^2}$ и оно дефинише једначину првог реда по y. Уз услове $y'(0) = 3/2$ и $y(0) = 2$ та једначина гласи

$$y' = \frac{1}{2} + \frac{4}{y^2}.$$

Ово је такође једначина која раздваја променљиве

$$\frac{y^2 dy}{y^2 + 8} = \frac{dx}{2},$$

а њено опште решење је[2]

$$y - 2\sqrt{2}\arctan\frac{y}{2\sqrt{2}} = \frac{x}{2} + C.$$

Из датог услова $y(0) = 2$ добија се тражено партикуларно решење за

$$C = 2 - 2\sqrt{2}\arctan\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

[2] $\displaystyle\int \frac{y^2 dy}{y^2+8} = \int \frac{y^2-8+8}{y^2+8} dy = y - 8 \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan\frac{y}{2\sqrt{2}} + D = y - 2\sqrt{2}\arctan\frac{y}{2\sqrt{2}} + D.$

3. Одредити опште решење система диференцијалних једначина

$$x'(t) = -\frac{t(x+y)}{x^2+y^2}, \quad y'(t) = \frac{t(x-y)}{x^2+y^2}.$$

Решење. Симетричан облик датог система је

$$\frac{dx}{tx+ty} = \frac{dy}{ty-tx} = -\frac{dt}{x^2+y^2}.$$

Из прве једнакости имамо хомогену једначину

$$y' = \frac{y-x}{y+x}$$

чије је опште решење[3]

$$(x^2+y^2)e^{2\arctan\frac{y}{x}} = C_1. \tag{5}$$

Наравно, ова једнакост је један први интеграл датог система.

Из једнакости

$$\frac{xdx+ydy}{tx^2+ty^2} = -\frac{dt}{x^2+y^2}$$

следи једнакост $d(x^2+y^2) = -d(t^2)$ из које имамо још један први интеграл

$$x^2+y^2+t^2 = C_2. \tag{6}$$

Једнакости (5) и (6) дефинишу решење датог система уколико су први интеграли $\varphi = C_1$ и $\psi = C_2$ независни, где је

$$\varphi(x,y,t) = (x^2+y^2)e^{2\arctan\frac{y}{x}}, \quad \psi(x,y,t) = x^2+y^2+t^2.$$

Како је

$$\begin{vmatrix} \psi'_x & \psi'_y \\ \varphi'_x & \varphi'_y \end{vmatrix} = 4(x^2+y^2)e^{2\arctan\frac{y}{x}} \neq 0$$

на области дефинисаности система, то су добијени први интеграли заиста независни. Према томе, непознате функције x и y су одређене једнакостима (5) и (6).

[3]Сменом $z = y/x$ имамо да је $y' = z + xz'$, а нова једначина је

$$\frac{1+z}{1+z^2}dz = -\frac{dx}{x}.$$

Интеграцијом налазимо да је

$$\arctan z + \frac{1}{2}\ln(1+z^2) = -\ln|x| + D_1,$$

односно

$$2\arctan z + \ln(1+z^2) = -\ln x^2 + D_2.$$

Из ове једнакости следи да је

$$(1+z^2)e^{2\arctan z} = \frac{C_1}{x^2},$$

одакле лако добијамо једнакост (5).