МАТЕМАТИКА 2

Други колоквијум, јуни 2018 - група 1

Драган Ђорић

1. Израчунати $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{3-x}}{2-x}dx$.

Решење. Сменом $3-x=t^3$ имамо да је $dx=-3t^2dt$ и $2-x=t^3-1$, па је

$$I=\int \frac{\sqrt[3]{3-x}}{2-x}dx=-3\int \frac{t^3dt}{t^3-1}=-3t-3\int \frac{dt}{t^3-1}=-3t-3J.$$

Како је

$$\frac{1}{t^3-1}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{t-1}-\frac{1}{3}\cdot\frac{t+2}{t^2+t+1},$$

то је

$$\begin{aligned}J&=\frac{1}{3}\ln|t-1|-\frac{1}{6}\int \frac{2t+4}{t^2+t+1}dt+C\\&=\frac{1}{3}\ln|t-1|-\frac{1}{6}\ln(t^2+t+1)-\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+t+4}+C\\&=\frac{1}{3}\ln|t-1|-\frac{1}{6}\ln(t^2+t+1)-\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C.\end{aligned}$$

Према томе,

$$I=-3t-\ln|t-1|+\frac{1}{2}\ln(t^2+t+1)+\sqrt{3}\arctan\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C,$$

где је $t=\sqrt[3]{3-x}$.

2. Израчунати дужину лука криве $y=\ln(1+\cos x)$ за $0\le x\le \frac{\pi}{3}$.

Решење. Према формули за дужину лука имамо да је

$$l=\int_0^{\pi/3}\sqrt{1+y'^2}dx=\sqrt{2}\int_0^{\pi/3}\frac{dx}{\sqrt{1+\cos x}}=\int_0^{\pi/3}\frac{dx}{\cos\frac{x}{2}}=2\int_0^{\pi/6}\frac{dx}{\cos x}.$$

Како је

$$\int_0^{\pi/6}\frac{dx}{\cos x}=\int_0^{\pi/6}\frac{dx}{\sin(\pi/2-x)}=\int_{\pi/3}^{\pi/2}\frac{dx}{\sin x}=\int_{\pi/3}^{\pi/2}\frac{d(\tan\frac{x}{2})}{\tan\frac{x}{2}}=\ln\left(\tan\frac{x}{2}\right)\Big|_{\pi/3}^{\pi/2},$$

то је

$$l=2\left(0-\ln\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=2\ln\sqrt{3}=\ln 3.$$

Напомена. За интеграл $I = \int \frac{dx}{\cos x}$, као и за интеграл $J = \int \frac{dx}{\sqrt{1+\cos x}}$ можемо да употребимо и универзалну тригонометријску смену $\tan\frac{x}{2} = t$, али то заиста није неопходно. Ако то ипак урадимо, добијамо да је

$$I = 2\int \frac{dt}{1-t^2}, \quad J = \sqrt{2}\int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}.$$

3. Израчунати $\displaystyle\iint_D e^{x^2+y^2}\frac{xy}{2x^2+y^2}dxdy$, где је

$$D = \{(x,y)\ :\ x^2+y^2 \le 2,\ y \ge x \ge 0\}.$$

Решење. Преласком на поларне координате (φ, ρ) уместо дате области D имамо нову област $G = [\pi/4, \pi/2] \times [0, \sqrt{2}]$, при чему је

$$I = \iint_D e^{x^2+y^2}\frac{xy}{2x^2+y^2}dxdy = \int_0^{\sqrt{2}} e^{\rho^2}\rho d\rho \cdot \int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{\cos\varphi\sin\varphi}{1+\cos^2\varphi}d\varphi = J\cdot K.$$

Како је

$$J = \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{2}} e^{\rho^2}d(\rho^2) = \frac{1}{2}e^{\rho^2}\Big|_0^{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}(e^2-1)$$

и

$$K = -\frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{d(1+\cos^2\varphi)}{1+\cos^2\varphi} = -\frac{1}{2}\ln(1+\cos^2\varphi)\Big|_{\pi/4}^{\pi/2} = \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2},$$

то је

$$I = J\cdot K = \frac{e^2-1}{4}\ln\frac{3}{2}.$$