МАТЕМАТИКА 3

• Диференцијалне једначине •

Диференцијалне једначине првог реда

Опште и сингуларно решење

У наставку ће нам $y = y(x)$ представљати реалну функцију реалне променљиве x, и њене изводе (до n-тог реда) ћемо стандадно означавати: $y' = y'(x)$, $y'' = y''(x)$,..., $y^{(n)} = y^{(n)}(x)$.

Једначину облика $F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$ називамо **диференцијалном једначином** n-тог реда, а њено **опште** решење тражимо у облику $\varphi(x, y, C_1, ..., C_n) = 0$, где су $C_1, ..., C_n$ неке реалне константе. За конкретне вредности тих константи добијамо неко од **партикуларних** решења дате једначине. Уколико имамо решење диференцијалне једначине које се не може добити из општег решења ни за један избор константи $C_1, ..., C_n$, тада такво решење називамо *сингуларним.*

За $n = 1$ имамо диференцијалну једначину првог реда $F(x, y, y') = 0$ и њено решење у облику $\varphi(x, y, C) = 0$. Некад је могуће (и згодно) да се диферецнијална једначина напише у облику $y' = f(x, y)$, као и њено решење у експлицитном облику $y = \psi(x, C)$.

Пример: Опште решење диференцијалне једначине првог реда $y' = 0$ је дато са $y = C$, $C = const$. Нека партикуларна решења те једначине су $y = 1$, $y = \sqrt{2}$, $y = e$ итд.

Опште решење диференцијалне једначине $y' = 2$ је $y = 5x + C$, $C = const$, а нека партикуларна решења су $y = 5x + 1$, $y = 5x + \pi$...

1. Доказати да је $y = 2Cx + C^2$ опште решење диференцијалне једначине $(y')^2 + 4xy' = 4y$.

Решење. Покажимо да $y = 2Cx + C^2$ заиста задовољава дату диференцијалну једначину: Како је $y' = 2C$, то важи

$$(y')^2 + 4xy' = (2C)^2 + 4x(2C) = 4C^2 + 8xC = 4(2Cx + C^2) = 4y.$$

По дефиницији, то јесте опште решење јер садржи једну константу и задовољава саму једначину. □

2. Доказати да је $x^2 = C(y-C)$, $C \neq 0$, опште решење диференцијалне једначине $x(y')^2-2yy'+4x = 0$. Показати да су $y = 2x$ и $y = -2x$ сингуларна решења те једначине.

Решење. Из $x^2 = C(y - C)$ и $C \neq 0$ добијамо да је $y = \frac{x^2}{C} + C$, одакле је $y' = \frac{2x}{C}$, па заменом y и y' у дату једначину добијамо да важи

$$\begin{aligned} x(y')^2 - 2yy' + 4x &= x\left(\frac{2x}{C}\right)^2 - 2\left(\frac{x^2}{C} + C\right)\frac{2x}{C} + 4x \\ &= \frac{4x^3}{C^2} - \frac{4x^3}{C^2} - 4x + 4x = 0, \end{aligned}$$

те је са $x^2 = C(y - C)$ заиста дато опште решење дате диференцијалне једначине.

Даље, ако је $y = 2x$, тада важи $y' = 2$, па је испуњено

$$x(y')^2 - 2yy' + 4x = x(2)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 2 + 4x = 0,$$

односно и $y = 2x$ је решење дате диференцијалне једначине, међутим оно је сингуларно. Наиме, не постоји вредност константе C, тако да је $\frac{y^2}{C} + C = 2x$, јер се ради о полиномима различитог степена. Аналогно се резонује и за $y = -2x$. ☐

Користећи запис извода преко диференцијала, $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, диференцијална једначина првог реда $F(x, y, y') = 0$ се некад може записати и у облику

$$P(x, y)\,\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}y = 0.$$

3. Доказати да је $\ln x \cdot \ln y = C$ опште решење диференцијалне једначине $y \ln y\,\mathrm{d}x + x \ln x\,\mathrm{d}y = 0$, и одредити партикуларно решење за које важи $y(e) = e$.

Решење. Видимо да је

$$y \ln y\,\mathrm{d}x + x \ln x\,\mathrm{d}y = xy\left(\frac{1}{x} \ln y\,\mathrm{d}x + \frac{1}{y} \ln x\,\mathrm{d}y\right) = xy\,\mathrm{d}(\ln x \cdot \ln y),$$

па закључујемо да важи $\mathrm{d}(\ln x \cdot \ln y) = 0$, одакле следи да је $\ln x \cdot \ln y = C$ заиста опште решење дате једначине.

Ако заменимо услов $y(e) = e$, односно $x = e$ и $y = e$ у дату једначину, добићемо да је испуњено $\ln e \cdot \ln e = c$, односно $C = 1$. Дакле, тражено партикуларно решење је $\ln x \cdot \ln y = 1$. ☐

Једначине са раздвојеним промењљивим

Диференцијалну једначину $y' = f(x)g(y) \;\Leftrightarrow\; \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = f(x)\,\mathrm{d}x$, $g(y) \neq 0$, називамо *једначином са раздвојеним промењљивим.* Решавамо је тако што интегралимо обе стране последње једнакости:

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int f(x)\,\mathrm{d}x \;\Rightarrow \cdots \Rightarrow\; G(y) + C_1 = F(x) + C_2,$$

односно опште решење је дато у облику $G(y) - F(x) = C$, где је $C = C_1 - C_2 = const$, и где су G и F примитивне функције функција g и f, редом.

4. Решити диференцијалну једначину $(1 + e^x)yy' = e^x$.

Решење. Раздвајањем промењљивих у једначини $(1 + e^x)y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = e^x$ добијамо једначину

$$y\,\mathrm{d}y = \frac{e^x}{1 + e^x}\,\mathrm{d}x.$$

Ако интегралимо леву и десну страну добићемо

$$\frac{y^2}{2} = \int y\,\mathrm{d}y = \int \frac{e^x}{1 + e^x}\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} t = 1 + e^x \\ \mathrm{d}t = e^x\,\mathrm{d}x \end{bmatrix} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln|t| + C = \ln(1 + e^x) + C,$$

па директно добијамо да је опште решење дате диференцијалне једначине $y^2 = 2\ln(1 + e^x) + C_1$, где је $C_1 = 2C$. ☐

5. Одредити партикуларно решење диференцијалне једначине $2y' = \cos(x-y) - \cos(x+y)$ које задовољава услов $y(0) = \frac{\pi}{2}$.

Решење. Одредимо најпре опште решење: Користећи познати тригонометријски идентитет за разлику косинуса добијамо да важи

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2} = \frac{-2\sin\frac{x-y+x+y}{2}\sin\frac{x-y-x-y}{2}}{2} = \sin x \sin y,$$

одакле, раздвајањем променљивих добијамо једначину

$$\frac{\mathrm{d}y}{\sin y} = \sin x\,\mathrm{d}x.$$

Интеграљењем обе стране имамо да важи

$$-\cos x + C = \int \sin x\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}y}{\sin y} = \left\lceil t = \operatorname{tg}\frac{y}{2}\right\rfloor = \int \frac{\frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln|t|,$$

односно опште решење гласи:

$$\cos x + \ln\left|\operatorname{tg}\frac{y}{2}\right| = C. \tag{1}$$

Заменом $x = 0$, $y = \frac{\pi}{2}$ у (1), добијамо да је $C = \cos 0 + \ln|\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}| = 1$, те је тражено партикуларно решење: $\cos x + \ln|\operatorname{tg}\frac{y}{2}| = 1$. □

Хомогене диференцијалне једначине

Једначину облика $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ називамо *хомогеном диференцијалном једначином првог реда.* Такву једначину решавамо сменом $z = \frac{y}{x}$, одакле је $y = zx$, односно $y' = z'x + z$.

6. Решити диференцијалну једначину $y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x} + 1$.

Решење. Ако уведемо смену $z = \frac{y}{x}$, одакле је $y = zx$ и $y' = z'x + z$, добијамо да је дата диференцијална једначина еквивалентна једначини $z'x + \cancel{z} = e^z + \cancel{z} + 1$, односно $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} \cdot x = e^z + 1$. Након раздвајања променљивих и интеграљења имамо

$$\ln|x| = \int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \int \frac{\mathrm{d}z}{e^z + 1} = \left[\begin{matrix} t = e^z \\ \frac{\mathrm{d}t}{t} = \mathrm{d}z \end{matrix}\right] = \int \frac{\mathrm{d}t}{t(t+1)} = \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t = \ln|t| - \ln|t+1| + C,$$

одакле је

$$C = \ln|x| + \ln|t+1| - \ln|t| = \ln\left|\frac{x(t+1)}{t}\right| = \ln\left|\frac{x(e^{\frac{y}{x}} + 1)}{e^{\frac{y}{x}}}\right|,$$

одакле је опште решење $C_1 e^{\frac{y}{x}} = x\left(e^{\frac{y}{x}} + 1\right)$, где је $C_1 = e^C$. □

7. Одредити партикуларно решење диференцијалне једначине $(xy' - y)\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = x$ које задовољава услов $y(1) = 0$.

Решење. Нађимо прво опште решење дате диференцијалне једначине. Ако поделимо обе стране са x добићемо наредну хомогену диференцијалну једначину:

$$\left(y' - \frac{y}{x}\right) \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = 1.$$

Ако уведемо смену $z = \frac{y}{x}$, одакле је $y' = z'x + z$, добићемо једначину $z'x \operatorname{arctg} z = 1$, па раздвајањем променљивих добијамо $\int \operatorname{arctg} z \,\mathrm{d}z = \int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + C$. Применом парцијалне интеграције, за $u = \operatorname{arctg} z$ и $\mathrm{d}v = \mathrm{d}z$, односно $\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}z}{z^2+1}$ и $v = z$, добијамо:

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{arctg} z \,\mathrm{d}z &= z \operatorname{arctg} z - \int \frac{z \,\mathrm{d}z}{z^2+1} = \begin{bmatrix} t = z^2+1 \\ \mathrm{d}t = 2z \,\mathrm{d}z \end{bmatrix} \\
&= z \operatorname{arctg} z - \frac{1}{2} \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = z \operatorname{arctg} z - \frac{1}{2} \ln|t| \\
&= \frac{y}{x} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) \\
&= \frac{y}{x} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \frac{1}{2}\big(\ln(x^2+y^2) - 2\ln|x|\big) \\
&= \frac{y}{x} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \frac{1}{2}\big(\ln(x^2+y^2)\big) + \ln|x|,
\end{aligned}$$

одакле добијамо да је опште решење дате једначине

$$\frac{y}{x} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \frac{1}{2}\big(\ln(x^2+y^2)\big) = C. \tag{2}$$

Ако заменимо $x = 1$ и $y = 0$ у (2), добићемо $C = 0 \cdot \operatorname{arctg} 0 - \frac{1}{2}(\ln(0^2+1^2)) = 0$, те је тражено партикуларно решење $\frac{y}{x} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \frac{1}{2}\big(\ln(x^2+y^2)\big)$. ☐

8. Одговарајућом сменом свести једначину $y' = \frac{x+y-3}{x-y-1}$ на хомогену, а затим је решити.

Решење. Уколико не бисмо имали -3 и -1 у бројиоцу, односно имениоцу, тада бисмо једноставно добили хомоген облик дате једначине. Применићемо један трик тако да изгубимо те бројеве. Уведимо смену $x = x_1 + \alpha$, $y = y_1 + \beta$ за погодно изабране α и β:

$$\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x_1} = \frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x_1} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x_1+\alpha+y_1+\beta-3}{x_1+\alpha-y_1-\beta-1} = \frac{x_1+y_1+\alpha+\beta-3}{x_1-y_1+\alpha-\beta-1}.$$

Мотивација нам је да изаберемо α и β тако да важи $\alpha + \beta = 3$ и $\alpha - \beta = 1$. Једноставно добијамо да је $\alpha = 2$ и $\beta = 1$. Сада решавамо једначину

$$\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x_1} = \frac{x_1+y_1}{x_1-y_1} = \frac{1+\frac{y_1}{x_1}}{1-\frac{y_1}{x_1}} \overset{z=\frac{y_1}{x_1}}{\Leftrightarrow} z'x_1 + z = \frac{1+z}{1-z},$$

одакле је

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x_1} x_1 = \frac{1+z}{1-z} - z = \frac{1+z-z+z^2}{1-z} = \frac{z^2+1}{1-z},$$

па раздвајањем променљивих добијамо

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}x_1}{x_1} = \frac{(1-z)\,\mathrm{d}z}{z^2+1} \\
\Rightarrow &\int \frac{\mathrm{d}x_1}{x_1} = \int \frac{(1-z)\,\mathrm{d}z}{z^2+1} = \int \frac{\mathrm{d}z}{z^2+1} - \frac{z\,\mathrm{d}z}{z^2+1} = \operatorname{arctg} z - \frac{1}{2}\ln(z^2+1),
\end{aligned}$$

односно враћањем смена $x_1 = x - 2$ и $z = \frac{y-1}{x-2}$:

$$\ln|x-2| + C = \operatorname{arctg}\frac{y-1}{x-2} - \frac{1}{2}\ln\left(\left(\frac{y-1}{x-2}\right)^2 + 1\right).$$

Након мало сређивања добијамо опште решење у облику

$$2\operatorname{arctg}\frac{y-1}{x-2} = \ln\bigl((x-2)^2 + (y-1)^2\bigr) + C.$$

$\square$

Напомена: Идеја из прошлог задатка не мора увек да „упали" јер може да се деси да не постоје тражени α и β, односно систем који се добије нема решења. То ће се десити када је систем линеарно зависан, па треба узети одговарајућу смену $z = z(x, y)$:

Пример: Диференцијалну једначину $(x+y+1)\,\mathrm{d}x + (2x+2y-1)\,\mathrm{d}y = 0$ можемо свести на облик $y' = -\frac{x+y+1}{2(x+y)-1}$, и да уведемо смену $z = x + y$, одакле добијамо једначину $z' - 1 = -\frac{z+1}{2z-1}$, коју даље решавамо познатим методама.