МАТЕМАТИКА 3

• Диференцијалне једначине •

2. час: Неки типови диференцијалних једначина првог реда

Линеарна диференцијална једначина првог реда

Једна од најосновнијих диференцијалних једначина коју ћемо разматрати је облика

$$y' + p(x)y = q(x). \tag{1}$$

Претпоставимо да је $P(x)$ функција таква да важи $P'(x) = p(x)$. Ако помножимо обе стране једначине (1) са $e^{P(x)}$ имаћемо

$$e^{P(x)}y' + e^{P(x)}P'(x)y = q(x)e^{P(x)},$$

односно

$$\left(e^{P(x)}y\right)' = q(x)e^{P(x)},$$

одакле имамо да је

$$e^{P(x)}y = \int q(x)e^{P(x)}\,\mathrm{d}x + C,$$

односно

$$y = e^{-P(x)}\left(C + \int q(x)e^{P(x)}\,\mathrm{d}x\right).$$

Ако узмемо да је $P(x) = \int p(x)\,\mathrm{d}x$, добићемо да је решење посматране једначине облика

$$y(x) = e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}\left(C + \int q(x)e^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x\right).$$

Да ли би се резултат разликовао за неки други избор функције $P(x)$?

1. Решити диференцијалну једначину $y' + \dfrac{y}{x} = 3x$.

Решење. У овом примеру је $p(x) = \dfrac{1}{x}$ и $q(x) = 3x$. Примењујући формулу коју смо извели за опште решење линеарне диференцијалне једначине првог реда, добијамо:

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{-\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x}\left(C + \int 3xe^{\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x\right) = e^{-\ln|x|}\left(C + 3\int xe^{\ln|x|}\,\mathrm{d}x\right) \\ &= \frac{1}{|x|}\left(C + 3\int x|x|\,\mathrm{d}x\right) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}\left(C + 3\int x^2\,\mathrm{d}x\right) = \dfrac{1}{x}\left(C + 3\cdot\dfrac{x^3}{3}\right) = \dfrac{C}{x} + x^2, & x > 0, \\ -\dfrac{1}{x}\left(C - 3\int x^2\,\mathrm{d}x\right) = -\dfrac{1}{x}\left(C - 3\cdot\dfrac{x^3}{3}\right) = -\dfrac{C}{x} + x^2, & x < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Видимо да, пошто је C произвољна константа, да је опште решење облика $y(x) = \dfrac{C}{x} + x^2$, независно од знака x код апсолутне вредности, те ћемо убудуће у оваквим случајевима радити само као да је ту у питању знак плус.

2. Решење: Ово решење ће користити нешто општију методу, методу неодређених функција. Идеја методе је да тражимо непознату функцију $y(x)$ у облику $u(x)v(x)$, где су u и v погодно изабране функције. За почетак, заменом $y' = u'v + uv'$ у једначину добијамо да важи

$$u'v + uv' + \frac{1}{x}uv = 3x \quad \Leftrightarrow \quad u'v + \left(v' + \frac{1}{x}v\right)u = 3x. \tag{2}$$

Пошто ми имамо слободу у бирању функција, захтеваћемо да члан уз u буде једнак нули:

$$v' + \frac{1}{x}v = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{\mathrm{d}v}{v} = \frac{\mathrm{d}x}{x} \quad \Leftrightarrow \quad \int -\frac{\mathrm{d}v}{v} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x} \quad \Rightarrow \quad -\ln|v| = \ln|x| \quad \Rightarrow \quad |v| = |x|^{-1}.$$

Узећемо да је $v = 1/x$, па ћемо заменом у (2) даље добити да је

$$u'\frac{1}{x} + 0 \cdot u = 3x \quad \Leftrightarrow \quad u' = 3x^2,$$

одакле директно добијамо да је $u = x^3 + C$. Коначно, решење почтетне једначине је

$$y(x) = u(x)v(x) = (x^3 + C)\frac{1}{x} = x^2 + \frac{C}{x}.$$

□

2. Решити диференцијалну једначину $y' = \dfrac{y}{\ln y + x - 1}$.

Решење. Јасно је да ова једначина није линеарна кад је посматрамо као једначину по функцији $y = y(x)$. Ипак, имамо

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{\ln y + x - 1} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{\ln y + x - 1}{y} \quad \Leftrightarrow \quad x'(y) - \frac{1}{y}x = \frac{\ln y - 1}{y},$$

односно дата једначина је линеарна уколико је посматрамо као једначину по $x = x(y)$. Сада је:

$$\begin{aligned} x(y) &= e^{\int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y}\left(C + \int \frac{\ln y - 1}{y} e^{-\int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y}\,\mathrm{d}y\right) = y\left(C + \int \frac{\ln y - 1}{y^2}\,\mathrm{d}y\right) \\ &= y\left(C - \frac{\ln y - 1}{y} + \int \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y\right) = y\left(C - \frac{\ln y - 1}{y} - \frac{1}{y}\right) = Cy - \ln y. \end{aligned}$$

□

3. Одредити партикуларно решење диференцијалне једначине $y' \sin x - y \cos x = -\dfrac{\sin^2 x}{x^2}$ за које важи гранични услов $\lim\limits_{x \to \infty} y(x) = 0$.

Решење. Најпре, дељењем једначине са $\sin x$ добијамо линеарну диференцијалну једначину:

$$y' - y\frac{\cos x}{\sin x} = -\frac{\sin x}{x^2}.$$

Пошто је

$$\int\left(-\frac{\cos x}{\sin x}\right)\mathrm{d}x = -\int\frac{d(\sin x)}{\sin x} = -\ln|\sin x| = \ln|\sin x|^{-1},$$

то имамо да је опште решење:

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{\ln|\sin x|}\left(C + \int\left(-\frac{\sin x}{x^2}\right)e^{\ln|\sin x|^{-1}}\,\mathrm{d}x\right) = \sin x\left(C + \int\frac{-\sin x}{x^2}\cdot\frac{1}{\sin x}\,\mathrm{d}x\right) \\ &= \sin x\left(C + \int\frac{-1}{x^2}\,\mathrm{d}x\right) = \sin x\left(C + \frac{1}{x}\right) = C\sin x + \frac{\sin x}{x}. \end{aligned}$$

Ако искористимо сада дати услов, имаћемо:

$$0 = \lim_{x\to\infty} y(x) = \lim_{x\to\infty}\left(C\sin x + \cancelto{0}{\frac{\sin x}{x}}\right),$$

па како $\sin x$ не конвергира за $x \to \infty$, јасно је да мора бити $C = 0$. Дакле, тражено партикуларно решење је $y(x) = \dfrac{\sin x}{x}$. □

Бернулијева диференцијална једначина

Разматраћемо диференцијалну једначину следећег типа:

$$y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha},$$

где је $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$. Видимо да се у случају да је $\alpha = 0$ или $\alpha = 1$ ради о линеарног диференцијалној једначини првог реда, те нам стога ти случајеви нису интересантни.

Саму једначину ћемо решавати тако што најпре уведемо смену $z = y^{1-\alpha}$. Видимо да је тада

$$z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y',$$

одакле је

$$\begin{aligned} & y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha} \;\Big/\cdot(1-\alpha)y^{-\alpha} \\ \Rightarrow & (1-\alpha)y^{-\alpha}y' + (1-\alpha)p(x)y^{1-\alpha} = (1-\alpha)q(x) \\ \Leftrightarrow & z' + (1-\alpha)p(x)z = (1-\alpha)q(x), \end{aligned}$$

односно свели смо дату диференцијалну једначину на линеарну диференцијалну једначину првог реда коју знамо да решимо.

4. Решити диференцијалну једначину $xy' + y = y^2\ln x$.

Решење. Након дељења једначине са x добијамо једначину:

$$y' + \frac{1}{x}y = \frac{\ln x}{x}y^2,$$

односно имамо Бернулијеву једначину код које је $p(x) = \dfrac{1}{x}$, $q(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ и $\alpha = 2$. Увешћемо смену $z = y^{1-2} = y^{-1}$, под условом да је $y \neq 0$. Одатле је $y = z^{-1}$, односно $y' = -z^{-2}z'$. Заменом у једначину добијамо:

$$-z^{-2}z' + \frac{1}{x}z^{-1} = \frac{\ln x}{x}z^{-2}.$$

Након што помножимо једначину са $-z^2$, добићемо линеарну једначину по $z = z(x)$:

$$z' - \frac{1}{x}z = -\frac{\ln x}{x}.$$

Њено решење је сада по формули једноставно

$$\begin{aligned} z(x) &= e^{\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x}\left(C - \int \frac{\ln x}{x} e^{-\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x\right) = x\left(C - \int \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x\right) \\ &= x\left(C + \frac{\ln x}{x} - \int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x\right) = x\left(C + \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x}\right) = Cx + \ln x + 1, \end{aligned}$$

одакле је

$$y(x) = \frac{1}{Cx + \ln x + 1}.$$

Приметимо да је $y = 0$ решење дате диференцијалне једначине, и то сингуларно решење.

2. Решење. Задатак се може решити и методом неодређених функција: Ако је $y(x) = u(x)v(x)$, тада имамо да је једначина еквивалентна са

$$u'v + uv' + \frac{1}{x}uv = \frac{\ln x}{x}u^2v^2 \quad \Leftrightarrow \quad u'v + \left(v' + \frac{1}{x}v\right)u = \frac{\ln x}{x}u^2v^2.$$

Ако захтевамо да је $v' + \frac{v}{x} = 0$, као и у 2. решењу првог задатка код линеарних диференцијалних једначина, можемо узети да је $v = 1/x$. Одатле добијамо

$$\frac{1}{x}u' = \frac{\ln x}{x}u^2 \cdot \frac{1}{x^2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}u}{u^2} = \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x \quad \Leftrightarrow \quad \int \frac{\mathrm{d}u}{u^2} = \int \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Као и у првом решењу имамо да је

$$-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} = \int \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}u}{u^2} = -\frac{1}{u} + C,$$

одакле директно добијамо да је

$$u(x) = \frac{x}{Cx + \ln x + 1},$$

а самим тим и

$$y(x) = u(x)v(x) = \frac{1}{Cx + \ln x + 1}.$$

□

5. Решити диференцијалну једначину $y' + 2xy = 2x^3y^3$.

Решење. У овом случају имамо да је $p(x) = 2x$ и $q(x) = 2x^3$, и $\alpha = 3$. Увођењем смене $z = y^{1-3} = y^{-2}$, за $y \neq 0$, добијамо да је $y = z^{-1/2}$, односно $y' = -\frac{1}{2}z^{-3/2}z'$, одакле је даље

$$-\frac{1}{2}z^{-\frac{3}{2}}z' + 2xz^{-\frac{1}{2}} = 2x^3z^{-\frac{3}{2}}.$$

Множењем једначине са $-2z^{\frac{3}{2}}$, добијамо линеарну диференцијалну једначину

$$z' - 4xz = -4x^3,$$

чије је решење

$$\begin{aligned} z(x) &= e^{\int 4x\,\mathrm{d}x}\left(C + \int (-4x^3)e^{-\int 4x\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x\right) = e^{2x^2}\left(C + \int -4x^3e^{-2x^2}\,\mathrm{d}x\right) \\ &= \left[\begin{array}{c} t = -2x^2 \\ \mathrm{d}t = -4x\,\mathrm{d}x \end{array}\right] = e^{2x^2}\left(C - \frac{1}{2}\int te^t\,\mathrm{d}t\right) = e^{2x^2}\left(C - \frac{1}{2}(te^t - e^t)\right) \\ &= e^{2x^2}\left(C - \frac{1}{2}e^{-2x^2}(-2x^2 - 1)\right) = Ce^{2x^2} + x^2 + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Директно следи да је опште решење почетне једначине дато са

$$y^2(x) = \frac{1}{Ce^{2x^2} + x^2 + \frac{1}{2}}.$$

Приметимо још да је $y = 0$ сингуларно решење дате једначине. □

6. Решити диференцијалну једначину $y'x^3\sin y + 2y = xy'$.

Решење. Најпре, видимо да је дата једначина еквивалентна са

$$y'(x^3\sin y - x) = -2y,$$

одакле је

$$y'(x) = \frac{2y}{x - x^3\sin y},$$

односно, за $y \neq 0$,

$$x'(y) = \frac{x - x^3\sin y}{2y} \quad \Leftrightarrow \quad x' - \frac{1}{2y}x = -\frac{\sin y}{2y}\cdot x^3,$$

што је Бернулијева једначина за $\alpha = 3$. Након увођења смене $z = x^{1-3} = x^{-2}$, одакле је $x = z^{-1/2}$ и $x' = -\frac{1}{2}z^{-3/2}z'$, добијамо

$$-\frac{1}{2}z^{-3/2}z' - \frac{1}{2y}z^{-1/2} = -\frac{\sin y}{2y}z^{-3/2} \quad \Rightarrow \quad z' + \frac{1}{y}z = \frac{\sin y}{y}.$$

Последња линеарна диференцијална једначина се сада једноставно решава:

$$\begin{aligned} z(y) &= e^{-\int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y}\left(C + \int \frac{\sin y}{y}e^{\int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y}\,\mathrm{d}y\right) = \frac{1}{y}\left(C + \int \frac{\sin y}{y}\cdot y\,\mathrm{d}y\right) \\ &= \frac{1}{y}\left(C + \int \sin y\,\mathrm{d}y\right) = \frac{1}{y}(C - \cos y), \end{aligned}$$

одакле је опште решење почетне једначине

$$x^2(y) = \frac{y}{C - \cos y}.$$

□

Једначина са тоталним диференцијалом

Једначину облика

$$P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = 0 \tag{3}$$

називамо једначином са тоталним диференцијалом уколико је испуњен услов $P'_y = Q'_x$. Идеја је да одредимо функцију $u = u(x,y)$ такву да је $\mathrm{d}u = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$, односно

$$u'_x\,\mathrm{d}x + u'_y\,\mathrm{d}y = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y, \tag{4}$$

јер би тада (3) било еквивалентно са $\mathrm{d}u = 0$, одакле би опште решење дате диференцијалне једначине било одређено са $u(x,y) = C$.

Видимо да ће (4) бити испуњено уколико важи $u'_x(x,y) = P(x,y)$ и $u'_y(x,y) = Q(x,y)$. Видимо да из прве од тих веза следи да је

$$u(x,y) = \int P(x,y)\,\mathrm{d}x + C(y), \tag{5}$$

где је $C(y)$ функција по променљивој y, коју ћемо одредити из услова $u'_y = Q$:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial y}\left(\int P(x,y)\,\mathrm{d}x + C(y)\right) = Q(x,y)\\
\Leftrightarrow\ &\frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)\,\mathrm{d}x + C'(y) = Q(x,y)\\
\Leftrightarrow\ &C'(y) = Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)\,\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

па ћемо узети да је

$$C(y) = \int \left[Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)\,\mathrm{d}x\right]\,\mathrm{d}y.$$

Заменом у (5) добијамо коначно да је

$$u(x,y) = \int P(x,y)\,\mathrm{d}x + \int \left[Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)\,\mathrm{d}x\right]\,\mathrm{d}y. \tag{6}$$

Могли смо да радимо и другим редоследом (прво искористимо да је $u'_y = Q$), па бисмо тада за функцију u добили да је $u = \int Q\,\mathrm{d}y + \int \left[P - \frac{\partial}{\partial x}\int Q\,\mathrm{d}y\right]\,\mathrm{d}x$.

7. Решити диференцијалну једначину $(3x^2 + 6xy^2)\,\mathrm{d}x + (6x^2y + 4y^3)\,\mathrm{d}y = 0$.

Решење. У овом задатку је $P(x,y) = 3x^2 + 6xy^2$ и $Q = 6x^2y + 4y^3$. Пошто је

$$P'_y = 12xy = Q'_x,$$

то је ово једначина са тоталним диференцијалом, чије је решење $u(x,y)=C$, где је u дато са (6). Најпре, имамо да је

$$\int P(x,y)\,\mathrm{d}x = \int (3x^2+6xy^2)\,\mathrm{d}x = x^3+3x^2y^2,$$

одакле је

$$\begin{aligned} u(x,y) &= x^3+3x^2y^2+\int \left[6x^2y+4y^3-\left(x^3+3x^2y^2\right)'_y\right]\,\mathrm{d}y \\ &= x^3+3x^2y^2+\int 4y^3\,\mathrm{d}y = x^3+3x^2y^2+y^4. \end{aligned}$$

Дакле, опште решење дате диференцијалне једначине је дато са

$$x^3+3x^2y^2+y^4=C.$$

□

8. Решити диференцијалну једначину $\left(\dfrac{y}{x^2+y^2}-y\right)\mathrm{d}x = \left(x+\dfrac{x}{x^2+y^2}-e^y\right)\mathrm{d}y.$

Решење. Дату једначину можемо записати у еквивалентном облику

$$\left(\frac{y}{x^2+y^2}-y\right)\mathrm{d}x - \left(x+\frac{x}{x^2+y^2}-e^y\right)\mathrm{d}y = 0.$$

Ако је $P(x,y)=\dfrac{y}{x^2+y^2}-y$ и $Q(x,y)=-x-\dfrac{x}{x^2+y^2}+e^y$, тада из

$$P'_y(x,y) = \frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2}-1 = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}-1,$$

односно

$$Q'_x(x,y) = -1-\frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = -1-\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

директно следи да је $P'_y=Q'_x$, односно ради се о једначини са тоталним диференцијалом. Важи

$$\int P(x,y)\,\mathrm{d}x = \int\left(\frac{y}{x^2+y^2}-y\right)\mathrm{d}x = \cancel{y}\cdot\frac{1}{\cancel{y}}\operatorname{arctg}\frac{x}{y}-xy = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}-xy.$$

Имајући у виду да је

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\int P(x,y)\,\mathrm{d}x\right) = \left(\operatorname{arctg}\frac{x}{y}-xy\right)'_y = \left(-\frac{x}{y^2}\right)\cdot\frac{y^2}{x^2+y^2}-x = \frac{-x}{x^2+y^2}-x,$$

то је

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \operatorname{arctg}\frac{x}{y}-xy+\int\left[-x-\frac{x}{x^2+y^2}-e^y+\frac{x}{x^2+y^2}+x\right]\mathrm{d}y \\ &= \operatorname{arctg}\frac{x}{y}-xy+\int e^y\,\mathrm{d}y = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}-xy+e^y, \end{aligned}$$

те је, коначно, опште решење дато са $\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}-xy+e^y=C$. □

Интеграциони фактор

У случајевима када имамо једначину облика

$$P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = 0,$$

а притом не важи $P'_y = Q'_x$, ствар може спасити такозвани интеграциони фактор. То је функција $\lambda = \lambda(x,y)$ таква да је једначина

$$\lambda(x,y)P(x,y)\,\mathrm{d}x + \lambda(x,y)Q(x,y)\,\mathrm{d}y = 0$$

једначина са тоталним диференцијалом. Дакле, треба да одредимо ту функцију λ из услова $(\lambda P)'_y = (\lambda Q)'_x$. Тај задатак није увек једноставан, али ће у задацима обично бити једна од ситуација где је $\lambda = \lambda(x)$ или $\lambda = \lambda(y)$.

9. За диференцијалну једначину

$$(x\sin y + y\cos y)\,\mathrm{d}x + (x\cos y - y\sin y)\,\mathrm{d}y = 0$$

одредити интеграциони фактор облика $\lambda(x)$, а затим решити једначину.

Решење. Интеграциони фактор одређујемо из

$$(\lambda(x)(x\sin y + y\cos y))'_y = (\lambda(x)(x\cos y - y\sin y))'_x,$$

одакле је

$$\lambda(x)(x\cos y + \cos y - y\sin y) = \lambda'(x)(x\cos y - y\sin y) + \lambda(x)\cos y,$$

односно

$$\lambda(x)(x\cos y - y\sin y) = \lambda'(x)(x\cos y - y\sin y).$$

Сада из

$$\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}x} = \lambda \quad\Rightarrow\quad \frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda} = \mathrm{d}x \Big/ \int \quad\Rightarrow\quad \ln\lambda = x$$

добијамо да је $\lambda(x) = e^x$. Сада кад смо одредили интеграциони фактор, решавамо нови проблем:

$$e^x(x\sin y + y\cos y)\,\mathrm{d}x + e^x(x\cos y - y\sin y)\,\mathrm{d}y = 0,$$

што је сада једначина са тоталним диференцијалом, уз $P(x,y) = e^x(x\sin y + y\cos y)$ и $Q(x,y) = e^x(x\cos y - y\sin y)$. Важи

$$\begin{aligned}\int P(x,y)\,\mathrm{d}x &= \int e^x(x\sin y + y\cos y)\,\mathrm{d}x = \sin y\int xe^x\,\mathrm{d}x + y\cos y\int e^x\,\mathrm{d}x\\ &= \sin y(xe^x - e^x) + y\cos y e^x = ((x-1)\sin y + y\cos y)e^x.\end{aligned}$$

Даље је

$$(((x-1)\sin y + y\cos y)e^x)'_y = ((x-1)\cos y + \cos y - y\sin y)e^x = (x\cos y - y\sin y)e^x,$$

одакле се једноставно добија да је опште решење $u(x,y) = C$, где је

$$u(x,y) = ((x-1)\sin y + y\cos y)e^x.$$

□

10. За диференцијалну једначину

$$2xy\ln y\,\mathrm{d}x + \left(x^2 + y^2\sqrt{y^2+1}\right)\mathrm{d}y = 0$$

одредити интеграциони фактор облика $\lambda(y)$, а затим решити једначину.

Решење. Интеграциони фактор ћемо одређивати из услова

$$(2xy\ln y\cdot\lambda(y))'_y = \left((x^2 + y^2\sqrt{y^2+1})\cdot\lambda(y)\right)'_x,$$

односно

$$\begin{aligned} & 2x(\ln y + 1)\lambda(y) + (2xy\ln y)\lambda'(y) = 2x\lambda(y) \\ \Leftrightarrow\ & 2x\ln y\cdot\lambda(y) + 2xy\ln y\cdot\lambda'(y) = 0, \end{aligned}$$

одакле добијамо

$$\lambda'(y) = -\frac{\lambda(y)}{y} \quad\Rightarrow\quad \frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda} = -\frac{\mathrm{d}y}{y}\Big/\int \Rightarrow \ln|y| = -\ln|y|,$$

па ћемо узети да је $\lambda(y) = \dfrac{1}{y}$. Множењем почетне једначине добијеним интеграционим фактором, добијамо једначину са тоталним диференцијалом:

$$2x\ln y\,\mathrm{d}x + \left(\frac{x^2}{y} + y\sqrt{y^2+1}\right)\mathrm{d}y = 0$$

Пошто је

$$\int P(x,y)\,\mathrm{d}x = \int 2x\ln y\,\mathrm{d}x = x^2\ln y,$$

то је решење дате једначине $u(x,y) = C$, где је

$$\begin{aligned} u(x,y) &= x^2\ln y + \int\left[\frac{x^2}{y} + y\sqrt{y^2+1} - \left(x^2\ln y\right)'_y\right]\mathrm{d}y \\ &= x^2\ln y + \int y\sqrt{y^2+1}\,\mathrm{d}y = x^2\ln y + \frac{1}{3}(y^2+1)^{3/2}. \end{aligned}$$

□