МАТЕМАТИКА 3

• Диференцијалне једначине •

3. час: Диференцијалне једначине n-тог реда

Диференцијалне једначине којима се може снизити ред

Рекли смо да је општи облик диференцијалне једначине n-тог реда дат са $F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$. У неким примерима је могуће снизити ред такве једначине, пре свега неком погодном сменом. Уколико се, на пример, у једначини уопште не налазе функције $y, y', ..., y^{k-1}$, за неко $k \leq n$, тада је очигледан избор смене $z(x) = y^{(k)}(x)$. Тада је $y^{(k+1)} = z'(x)$,...,$y^{(n)} = z^{(n-k)}$, те добијамо нову једначину обилка $F(x, z, ..., z^{(n-k)}) = 0$.

1. Решити диференцијалну једначину $xy'' + y' - x^2 = 0$.

Решење. Приметимо да се у једначини нигде не појављује непозната функција y, па можемо увести смену $z(x) = y'(x)$. Тиме добијамо једначину

$$xz' + z - x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z' + z/x = x,$$

што је линеарна диференцијална једначина првог реда. Њено решење је:

$$z(x) = e^{-\int \frac{\mathrm{d}x}{x}} \left(C_1 + \int x e^{\int \frac{\mathrm{d}x}{x}} \, \mathrm{d}x \right) = \frac{1}{x} \left(C_1 + \int x^2 \, \mathrm{d}x \right) = \frac{C_1}{x} + \frac{x^2}{3}.$$

Када вратимо смену $z = y'$, добијамо да је

$$y' = \frac{C_1}{x} + \frac{x^2}{3},$$

односно интеграљењем, налазимо да је општо решење

$$y(x) = \int \left(\frac{C_1}{x} + \frac{x^2}{3} \right) \mathrm{d}x = C_1 \ln |x| + \frac{x^3}{9} + C_2.$$

□

2. Решити диференцијалну једначину $xy'' = y' \ln \dfrac{y'}{x}$.

Решење. Увођењем смене $z(x) = y'(x)$ добијамо једначину

$$xz' = z \ln \frac{z}{x} \quad \Leftrightarrow \quad z' = \frac{z}{x} \ln \frac{z}{x},$$

што је хомогена диференцијална једначина. Ако уведемо смену $u = \dfrac{z}{x}$, имаћемо да је $z' = u'x + u$, одакле је

$$u'x + u = u \ln u,$$

односно, раздвајањем променљивих,

$$\frac{\mathrm{d}u}{u\ln u - u} = \frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

Како је

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{u(\ln u - 1)} = \left[\begin{array}{c} v = \ln u - 1 \\ \mathrm{d}v = \frac{\mathrm{d}u}{u} \end{array}\right] = \int \frac{\mathrm{d}v}{v} = \ln|v| + C = \ln|\ln u - 1| + C,$$

то добијамо да је

$$\ln|x| = \ln|\ln u - 1| + C,$$

одакле је

$$|x| = |\ln u - 1|e^C,$$

па, уз одговарајућу смену, можемо писати

$$u = e^{C_1 x + 1},$$

односно

$$z = xe^{C_1 x + 1}.$$

Коначно, из $z = y'$ добијамо тражено опште решење дате једначине:

$$\begin{aligned} y(x) &= \int xe^{C_1 x+1}\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{cc} u = x & \mathrm{d}v = e^{C_1 x+1}\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}x & v = \frac{e^{C_1 x+1}}{C_1} \end{array}\right] \\ &= \frac{xe^{C_1 x+1}}{C_1} - \int \frac{e^{C_1 x+1}}{C_1}\,\mathrm{d}x = \frac{xe^{C_1 x+1}}{C_1} - \frac{e^{C_1 x+1}}{C_1^2} + C_2. \end{aligned}$$

□

У ситуацији где имамо диференцијалну једначину у којој одређујемо $y(x)$ али се у једначини не појављује променљива x, можемо користити смену $z(y) = y'$, те да посматрамо једначину у којој је y променљива. Тада ћемо имати

$$y''(x) = \frac{dy'}{\mathrm{d}x} = \frac{dy'}{\mathrm{d}y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = z'_y \cdot z,$$

и слично за изводе вишег реда.

3. Решити диференцијалну једначину $y'' = (y')^3 + y'$.

Решење. Приметимо да дата једначина испуњава особину из претходне дискусије, тако да ћемо увести смену $z(y) = z = y'$, одакле знамо да је $y'' = z'z$, и даље

$$z'z = z^3 + z \;\Rightarrow\; z' = z^2 + z \;\Rightarrow\; \frac{\mathrm{d}z}{z^2+1} = \mathrm{d}x.$$

Интеграљењем одатле добијамо да је $\operatorname{arctg} z = x + C_1$, односно $z = \operatorname{tg}(x + C_1)$. Ако сада вратимо смену, добићемо

$$y' = \operatorname{tg}(x + C_1) \;\Rightarrow\; y = \int \operatorname{tg}(x + C_1)\,\mathrm{d}x = \int \frac{\cos(x + C_1)}{\sin(x + C_1)}\,\mathrm{d}x = \ln|\sin(x + C_1)| + C_2.$$

НАПОМЕНА: Приметимо да се у овој једначини не појављује y, тако да смо задатак могли радити и сменом из претходна два задатка. □

4. Одредити партикуларно решење диференцијалне једначине $y'' = e^{2y}$ које задовољава услов $y(0) = 0$ и $y'(0) = 1$.

Решење. Увођењем смене $z(y) = y'$, добијамо једначину

$$z'z = e^{2y} \quad \Rightarrow \quad z\,\mathrm{d}z = e^{2y}\,\mathrm{d}y,$$

одакле интеграљењем добијамо да је

$$\frac{z^2}{2} = \frac{e^{2y}}{2} + C_1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(y')^2}{2} = \frac{e^{2y}}{2} + C_1.$$

Да не бисмо непотребно вукли константу C_1 до краја задатка, можемо да је одмах одредимо користећи дате почетне услове. Знамо да за $x = 0$ важи $y = 0$ и $y' = 1$, па заменом тих вредности у претходну једнакост добијамо да је

$$\frac{1}{2} = \frac{e^0}{2} + C_1,$$

односно, $C_1 = 0$. Сада имамо да важи

$$(y')^2 = e^{2y} = (e^y)^2,$$

одакле је $y' = e^y$ или $y' = -e^y$. Ми желимо да једна од тих опција буде испуњена на целом скупу на ком решавамо једначину, па пошто знамо да је $e^y > 0$ и $y'(0) = 1 > 0$, то закључујемо да мора бити $y' = e^y$. Даље је једноставно:

$$\frac{\mathrm{d}y}{e^y} = \mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad x = \int e^{-y}\,\mathrm{d}y = -e^{-y} + C_2.$$

Заменом $x = 0$, $y = 0$ добијамо непознату константу C_2:

$$0 = -e^0 + C_2 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 1,$$

па је тражено партикуларно решење дато са

$$x = 1 - e^{-y}.$$

□

Линеарне хомогене диференцијалне једначине

Линеарна диференцијална једначина n-тог реда је једначина:

$$a_0(x) \cdot y^{(n)} + a_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x) \cdot y' + a_n(x) \cdot y = f(x). \tag{1}$$

Уколико је $f(x) = 0$, онда претходну једначину називамо хомогеном. Размотримо, за почетак, линеарну хомогену диференцијалну једначину другог реда:

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0.$$

Ако је $y_1 = y_1(x)$ једно партикуларно решење ове једначине, онда се сменом $z(x) = \frac{y}{y_1}$ може добити једначина којој можемо снизити ред. Заиста, ако је $y = z \cdot y_1$, тада је $y' = z'y_1 + zy_1'$, као и $y'' = z''y_1 + 2z'y_1' + zy_1''$, одакле добијамо

$$a(x)(z''y_1 + 2z'y_1' + zy_1'') + b(x)(z'y_1 + zy_1') + c(x)zy_1 = 0,$$

односно груписањем чланова уз z, z' и z'':

$$z''(a(x)y_2) + z'(2a(x)y_1' + b(x)y_1) + z\underbrace{(a(x)y_1'' + b(x)y_1' + c(x)y_1)}_{=0} = 0,$$

чиме добијамо једначину у којој се не појављује z:

$$z''(a(x)y_2) + z'(2a(x)y_1' + b(x)y_1) = 0,$$

па можемо да јој снизимо ред сменом $u = z'$.

5. Решити диференцијалну једначину $(2x - x^2)y'' + (x^2 - 2)y' + 2(1 - x)y = 0$ ако је $y_1 = e^x$ једно партикуларно решење дате једначине.

Решење. За почетак, проверимо да $y_1 = e^x$ заиста јесте решење дате једначине:

$$(2x - x^2)(e^x)'' + (x^2 - 2)(e^x)' + 2(1 - x)e^x = \big(2x - x^2 + x^2 - 2 + 2 - 2x\big)e^x = 0.$$

За налажење општег решења ћемо искористити смену $z = \dfrac{y}{e^x}$, одакле је $y = z \cdot e^x$, а одатле и $y' = (z' + z)e^x$, односно $y'' = (z'' + 2z' + z)e^x$. Заменом у дату једначину добијамо

$$(2x - x^2)z'' - (x^2 - 4x + 2)z' = 0,$$

што је једначина којој можемо спустити ред сменом $u = z'$, чиме долазимо до једначине

$$(2x - x^2)u' = (x^2 - 4x + 2)u,$$

односно, раздвајањем променљивих

$$\frac{\mathrm{d}u}{u} = \frac{x^2 - 4x + 2}{2x - x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Интеграљењем даље добијамо

$$\begin{aligned}\ln|u| &= \int \frac{x^2 - 4x + 2}{2x - x^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{(x^2 - 2x) + (2 - x) - x}{x(2 - x)}\,\mathrm{d}x \\ &= \int \left(-1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x - 2}\right)\mathrm{d}x = -x + \ln|x| + \ln|x - 2| + C,\end{aligned}$$

односно

$$\ln\left|\frac{u}{x(x - 2)}\right| = -x + C \quad\Rightarrow\quad \frac{u}{x(x - 2)} = e^{-x}C_1.$$

Тиме смо добили да је $z' = C_1 e^{-x}(x^2 - 2)$, одакле је

$$\begin{aligned}z(x) &= C_1 \int e^{-x}(x^2 - 2x)\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} u = x^2 - 2x & \mathrm{d}v = e^{-x}\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u = (2x - 2)\,\mathrm{d}x & v = -e^{-x}\end{bmatrix} \\ &= C_1\left(-e^{-x}(x^2 - 2x) + \int (2x - 2)e^{-x}\,\mathrm{d}x\right) = \begin{bmatrix} u = 2x - 2 & \mathrm{d}v = e^{-x}\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u = 2\,\mathrm{d}x & v = -e^{-x}\end{bmatrix} \\ &= C_1\left(-e^{-x}(x^2 - 2x) - e^{-x}(2x - 2) + \int 2e^{-x}\,\mathrm{d}x\right) \\ &= -C_1\big(e^{-x}\big(x^2 - 2x + 2x - 2 + 2\big) + C\big) = -C_1 e^{-x}x^2 + C_2.\end{aligned}$$

Коначно, враћајући се на почетну смену, добијамо да је тражено опште решење:

$$y(x) = -C_1x^2 + C_2e^x.$$

□

НАПОМЕНА: Ако су y_1 и y_2 два независна решења хомогене линеарне диференцијалне једначине другог реда, тада је опште решење те једначине $y = C_1y_1 + C_2y_2$. Можемо утврдити да је у претходном задатку $y_2 = x^2$ заиста решење једначине. Аналоган закључак важи и у случају једначина вишег реда.

6. Решити диференцијалну једначину $(x-1)y'' + (4x-5)y' + (4x-6)y = 0$ ако је једно решење облика $y_1 = e^{ax}$, $a \in \mathbb{R}$.

Решење. Одредимо најпре a из облика партикуларног решења: Уврштањем $y_1 = e^{ax}$, $y_1' = ae^{ax}$ и $y_1'' = a^2e^{ax}$ у једначину добијамо

$$(x-1)a^2e^{ax} + (4x-5)ae^{ax} + (4x-6)e^{ax} = 0,$$

односно

$$(a^2+4a+4)x - (a^2+5a+6) = 0.$$

Одавде следи да мора бити $a^2+4a+4 = a^2+5a+6 = 0$, што повлачи да је $a = -2$. Дакле, $y_1 = e^{-2x}$, па ћемо за решавање дате једначине користити смену $y = ze^{-2x}$. Заменом у једначину, имајући у виду $y' = (z'-2z)e^{-2x}$ и $y'' = (z''-4z''+4z)e^{-2x}$, након краћег рачуна добијамо

$$(x-1)z'' - z' = 0.$$

Даље идемо стандардно: $u = z'$, па раздвојимо променљиве:

$$(x-1)u' = u \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}u}{u} = \frac{\mathrm{d}x}{x-1}.$$

Интеграљењем добијамо:

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x-1} \quad \Rightarrow \quad \ln|u| = \ln|x-1| + C,$$

одакле следи $z' = u = C_1(x-1)$. Сада је

$$z = \int C_1(x-1)\,\mathrm{d}x = C_1\frac{(x-1)^2}{2} + C_2,$$

па је одавде решење почетне једначине (уз модификацију константе C_1):

$$y(x) = \big(C_1(x-1)^2 + C_2\big)e^{-2x}.$$

□

Линеарне хомогене диференцијалне једначине са константним коефицијентима

Диференцијална једначина n-тог облика

$$a_0 \cdot y^{(n)} + a_1 \cdot y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} \cdot y' + a_n \cdot y = 0, \tag{2}$$

при чему је $a_0, a_1, ..., a_{n-1}, a_n \in \mathbb{R}$, назива се *линеарном хомогеном диф. једначином n-тог реда са константним коефицијентима.*

Једначини (2) придружујемо њену *карактеристичну једначину*

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0, \tag{3}$$

при чему се сам полином из те једначине назива карактеристичним полиномом. Јасно је да та једначина има n решења која ћемо означити са $\lambda_1, ..., \lambda_n$. Свако од тих решења генерише једно решење $y_1, ..., y_n$ почетне диференцијалне једначине. Ова решења су међусобно независна, и опште решење је дато са $y(x) = C_1y_1(x)+\cdots+C_ny_n(x)$. Разликујемо следеће случајеве за решења једачине (3):

1. λ_i је једноструко решење једначине (3): Тада оно генерише решење j-не (2) облика $y_i = e^{\lambda_i x}$.
2. λ_i је вишеструко решење вишеструкости k: Тада је са λ_i генерисано k независних решења једначине (2) облика $y_i = e^{\lambda_i x}, y_{i+1} = xe^{\lambda_i x}, ..., y_{i+k-1} = x^{k-1}e^{\lambda_i x}$.
3. λ_i и λ_{i+1} су једнострука, конјуговано комплексна решења: Ако је $\lambda_i = a + bi$ (односно $\lambda_{i+1} = a - bi$), онда су дефинисана два решења једначине (2) облика $y_i = e^{ax}\cos bx$ и $y_{i+1} = e^{ax}\sin bx$.
4. У случају комплексних решења вишеструкости веће од 1, можемо препоставити да је $\lambda_1 = \cdots = \lambda_k = a + bi$, и $\lambda_{k+1} = \cdots = \lambda_{2k} = a - bi$. Тада имамо $2k$ независних решења једначине (2) која су дата са $y_1 = e^{ax}\cos bx$, ..., $y_k = x^{k-1}e^{ax}\cos bx$, односно $y_{k+1} = e^{ax}\sin bx$, ..., $y_{2k} = x^{k-1}e^{ax}\sin bx$.

7. Решити диференцијалну једначину $y'' - 4y' + 3y = 0$.

Решење. Карактеристична једначина која одговара датој диференцијалној једначини је

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0,$$

чија су решења $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = 3$, па је опште решење почетне једначине

$$y(x) = C_1e^x + C_2e^{3x}.$$

□

8. Решити диференцијалну једначину $y''' - y' = 0$, а затим наћи партикуларно решење за које важи $y(0) = 0$, $y'(0) = -1$, $y''(0) = 1$.

Решење. Из карактеристичне једначине

$$\lambda^3 - \lambda = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda(\lambda^2 - 1) = 0$$

добијамо нуле $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$ и $\lambda_3 = 1$, одакле добијамо опште решење једначине

$$y(x) = C_1e^{0x} + C_2e^x + C_3e^{-x}.$$

Уврштајући почетне услове, имајући у виду да је

$$y'(x) = C_2e^x - C_3e^{-x},$$
$$y''(x) = C_2e^x + C_3e^{-x},$$

добијамо систем

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 + C_3 &= 0 \\ C_2 - C_3 &= -1 \\ C_2 + C_3 &= 1, \end{aligned}$$

чије је решење $(C_1, C_2, C_3) = (-1, 0, 1)$. Дакле, тражено решење датог Кошијевог проблема је:

$$y(x) = -1 + e^{-x}.$$

□

9. Решити диференцијалну једначину $y''' - y'' - y' + y = 0$.

Решење. Карактеристична једначина је

$$\begin{aligned} \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \lambda^2(\lambda - 1) - (\lambda - 1) = 0 \\ \Leftrightarrow \ (\lambda^2 - 1)(\lambda - 1) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (\lambda + 1)(\lambda - 1)^2 = 0, \end{aligned}$$

одакле имамо једну једноструку нулу $\lambda_1 = -1$ и једну двоструку нулу $\lambda_{2,3} = 1$. Самим тим, опште решење дате једначине је

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^x + C_3 x e^x.$$

□

10. Решити диференцијалну једначину $y^{(4)} + 2y''' - 2y' - y = 0$.

Решење. За карактеристичну једначину која одговара датој једначини,

$$\begin{aligned} \lambda^4 + 2\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \lambda^4 - 1 + 2\lambda(\lambda^2 - 1) = 0 \\ \Leftrightarrow \ (\lambda^2 - 1)(\lambda^2 + 1) + 2\lambda(\lambda^2 - 1) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (\lambda^2 - 1)(\lambda^2 + 1 + 2\lambda) = 0 \\ \Leftrightarrow \ (\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda + 1)^2 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (\lambda - 1)(\lambda + 1)^3 = 0, \end{aligned}$$

видимо да има једно једноструко решење $\lambda_1 = 1$ и једно троструко решење $\lambda_{2,3,4} = -1$. Одатле следи да је опште решење дато са:

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 x e^{-x} + C_4 x^2 e^{-x}.$$

□

11. Одредити партикуларно решење диференцијалне једначине $y''' + y' = 0$, које задовољава $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$, $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = y''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$.

Решење. Одредимо најпре опште решење дате диференцијалне једначине: Нуле карактеристичне једначине

$$\lambda^3 + \lambda = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda(\lambda^2 + 1) = 0$$

су $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_{2,3} = \pm i = 0 \pm 1i$, одакле видимо да је тражено опште решење дато са

$$y(x) = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x.$$

Пошто је

$$\begin{aligned} y'(x) &= -C_2 \sin x + C_3 \cos x \\ y''(x) &= -C_2 \cos x - C_3 \sin x, \end{aligned}$$

то из датих почетних услова добијамо систем линеарних једначина

$$\begin{array}{rrrcr} C_1 & & +C_3 & = & 2 \\ & -C_2 & & = & -1, \\ & & -C_3 & = & -1 \end{array}$$

одакле је $C_1 = C_2 = C_3 = 1$, па је тражено партикуларно решење:

$$y(x) = 1 + \cos x + \sin x.$$

□

12. Решити диференцијалну једначину $y'' - 4y' + 13y = 0$.

Решење. Нуле карактеристичне једначине

$$\lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0,$$

су $\lambda_1 = 2 + 3i$ и $\lambda_2 = 2 - 3i$, па је опште решење дато са

$$y(x) = C_1 e^{2x} \cos 3x + C_2 e^{2x} \sin 3x.$$

□

13. Решити диференцијалну једначину $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$.

Решење. Из карактеристичне једначине

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\lambda^2 + 1)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\lambda + i)^2(\lambda - i)^2 = 0$$

добијамо две двоструке комплексно конјуговане нуле $\lambda_{1,2} = -i$ и $\lambda_{3,4} = i$. Одатле следи да је

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 x \cos x + C_3 \sin x + C_4 x \sin x$$

опште решење дате једначине. □