

Prezentacija predmeta Numerička analiza

Informacije o predavačima

Nastavnik:

- dr Marija Boričić Joksimović, docent
- marija.boricic.joksimovic@fon.bg.ac.rs

Saradnik:

- Vukašin Brković, asistent
- brkovic.vukasin@fon.bg.ac.rs

Literatura:

- Udžbenik: Numeričke metode,
Rade Lazović,
- Zbirka: Numerička analiza - pregled teorije, primeri, zadaci,
Rade Lazović,
- Praktikum iz Numeričke analize,
Rade Lazović, Vukašin Brković.

Literatura:

Prezentacija
predmeta
Numerička
analiza



Nastavni materijali i informacije

Informacije o predmetu, vesti, rezultati i sl. će biti dostupni na sajtu Katedre za matematiku i preko platforme Microsoft Teams:

- <http://math.fon.bg.ac.rs/kursevi/numericka-analiza>
- Microsoft Teams - kanal Numerička analiza 2022/23

Materijali sa časova vežbi, kao i dodatni materijali iz svake teme za zainteresovane, nalaze se na stranici asistenta:

- <http://math.fon.bg.ac.rs;brkovic>

Nastavne teme:

- 1 Približni brojevi i greške funkcije
- 2 Nelinearne jednačine
- 3 Sistemi linearnih jednačina
- 4 Sistemi nelinearnih jednačina
- 5 Polinomska interpolacija
- 6 Aproksimacija funkcija
- 7 Numerička integracija
- 8 Diferencijalne jednačine

- Teme obojene istom bojom su alternativne.

- Teme obojene istom bojom su alternativne.
- Za svake dve alternativne teme, jedna se polaže praktično (jedan zadatak) kod asistenta, a druga tema se polaže teorijski kod profesorke.

- Teme obojene istom bojom su alternativne.
- Za svake dve alternativne teme, jedna se polaže praktično (jedan zadatak) kod asistenta, a druga tema se polaže teorijski kod profesorke.
- Prva tema (približni brojevi i greške funkcije) je obavezna.

- Teme obojene istom bojom su alternativne.
- Za svake dve alternativne teme, jedna se polaže praktično (jedan zadatak) kod asistenta, a druga tema se polaže teorijski kod profesorke.
- Prva tema (pričižni brojevi i greške funkcije) je obavezna.
- Osma tema (diferencijalne jednačine) je opcionalna i može se polagati u predviđenom terminu, ukoliko su do tada položene sve teme (dakle, prva i po jedna od svih alternativnih).

- Teme obojene istom bojom su alternativne.
- Za svake dve alternativne teme, jedna se polaže praktično (jedan zadatak) kod asistenta, a druga tema se polaže teorijski kod profesorke.
- Prva tema (pričižni brojevi i greške funkcije) je obavezna.
- Osma tema (diferencijalne jednačine) je opcionalna i može se polagati u predviđenom terminu, ukoliko su do tada položene sve teme (dakle, prva i po jedna od svih alternativnih).
- Na svakom praktičnom polaganju je dozvoljena literatura!

Praktični deo ispita

Termini polaganja:

- Poseban termin za kvalifikacioni zadatak
- 1. kolokvijumska nedelja
- 2. kolokvijumska nedelja
- Redovni ispitni rokovi
- 8. tema se može polagati samo u junskom i julskom ispitnom roku. Dozvoljen je jedan pokušaj za polaganje te teme.

Informacije o testovima:

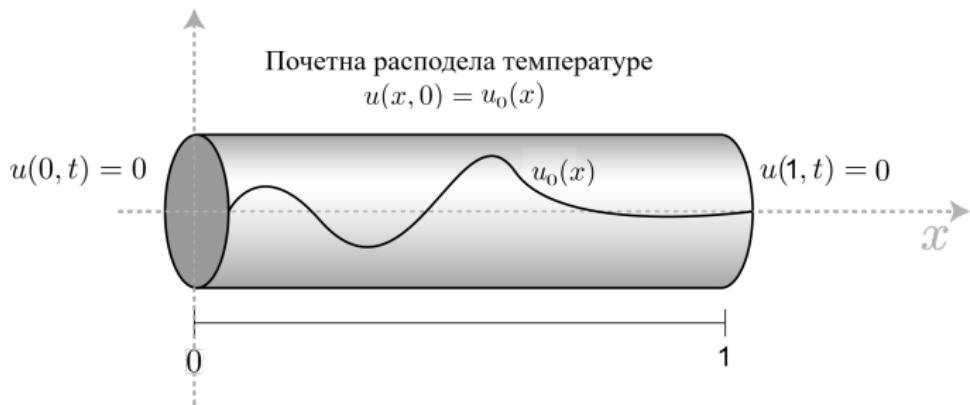
- Kvalifikacioni zadatak: Svako dobije jedan zadatak iz poznatog skupa zadataka. Radi se na papiru, uz dozvoljeno korišćenje rучног kalkulatora.
- Ostale teme: Radi se na papiru, za izračunavanja se koristi računar.

0 Matematičko modeliranje

Primer:

- Modelujemo provođenje topline u štapu kroz vremenski period $[0, T]$.
- Posmatraćemo štap kao jednodimenziono idealno telo. Svaka tačka na štapu ima koordinatu iz intervala $(0, 1)$.
- Zanemarićemo sva spoljna delovanja na štap osim izvora topline koji je opisan funkcijom $f(x, t)$.
- Smatraćemo da je poznata početna raspodela temperature u štapu i da je opisana funkcijom $u_0(x)$.
- Prepostavićemo da je temperatura na krajevima uvek jednaka nuli.
- Rešenje problema je funkcija $u(x, t)$ temperature u tački x u trenutku t .

0 Matematičko modeliranje



Matematička jednačina koja odgovara problemu je:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad t \in (0, T],$$
$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad t \in (0, T],$$
$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in (0, 1).$$

0 Matematičko modeliranje

- Tačno rešenje ovog problema glasi:

$$u(x, t) =$$

$$2 \sum_{j=1}^{\infty} e^{-j^2\pi^2 t} \sin j\pi x \int_0^1 \left[u_0(y) + \int_0^t f(y, s) e^{j^2\pi^2 s} ds \right] \sin j\pi y dy$$

0 Matematičko modeliranje

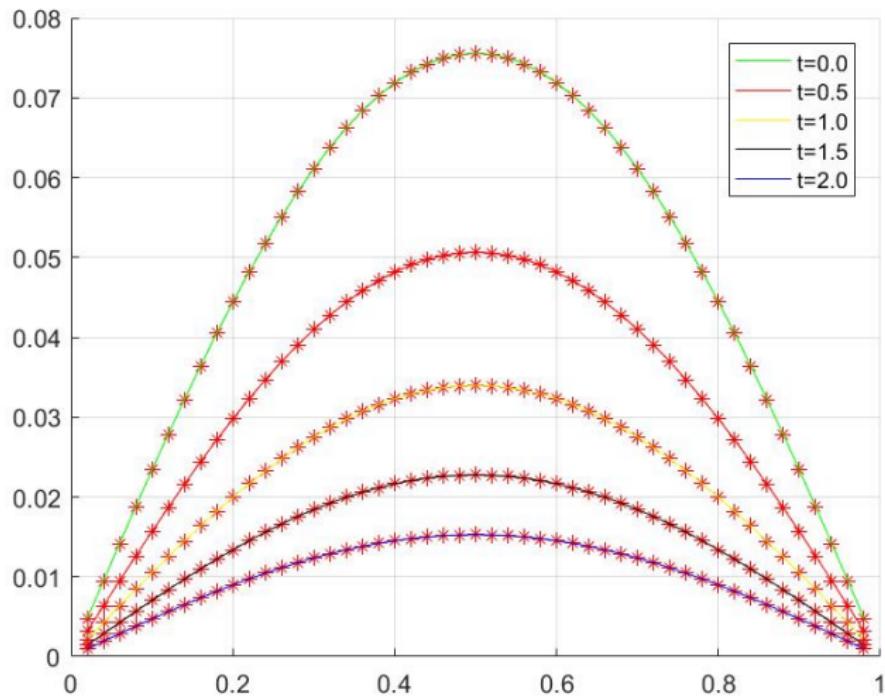
- Tačno rešenje ovog problema glasi:

$$u(x, t) =$$

$$2 \sum_{j=1}^{\infty} e^{-j^2\pi^2 t} \sin j\pi x \int_0^1 \left[u_0(y) + \int_0^t f(y, s) e^{j^2\pi^2 s} ds \right] \sin j\pi y dy$$

- Potrebno nam je numeričko rešenje!

0 Matematičko modeliranje



1 Pojam greške

Pojmovi koji su u osnovi numeričkog izračunavanja:

- Približne vrednosti brojeva,
- Značajne i sigurne cifre,
- Zaokrugljivanje
- Direktan i obratan problem greške funkcije

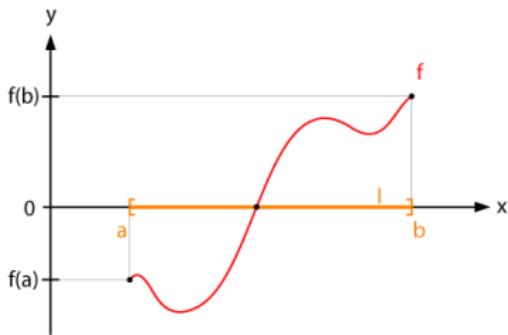
2 Nelinearne jednačine

Rešavamo jednačinu $f(x) = 0$, gde je f u opštem slučaju neka nelinearna funkcija.

Ukoliko postoji realan broj ξ takav da je $f(\xi) = 0$, tada njega zovemo *tačnim rešenjem* jednačine.

Osnovni zadaci:

- Izolacija rešenja: Nalaženje intervala $[a, b]$ koji sadrži ξ .
- Nalaženje približnog rešenja sa unapred zadatom greškom.



2 Nelinearne jednačine

Razmatraćemo iterativne metode za dobijanje približnog rešenja:

- Metoda polovljenja intervala;
- Njutnova metoda (tangenti);
- Metoda regula falsi;
- Metoda (proste) iteracije.

Razmatramo konvergenciju i ocenjujemo tačnost svake metode.

3 Sistemi linearih jednačina

Rešavamo jednačinu oblika

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

gde su $a_{ij}, x_j, b_i \in \mathbb{R}$, za sve $i, j = 1, 2, \dots, n$, odnosno u matričnom obliku:

$$Ax = b, \quad A \in \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{R}), \quad x, b \in \mathbb{R}^n.$$

3 Sistemi linearih jednačina

Rešavamo jednačinu oblika

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

gde su $a_{ij}, x_j, b_i \in \mathbb{R}$, za sve $i, j = 1, 2, \dots, n$, odnosno u matričnom obliku:

$$Ax = b, \quad A \in \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{R}), \quad x, b \in \mathbb{R}^n.$$

Dve grupe metoda za rešavanje ovog problema:

- direktne,
- iterativne.

3 Sistemi linearih jednačina

Rešavamo jednačinu oblika

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

gde su $a_{ij}, x_j, b_i \in \mathbb{R}$, za sve $i, j = 1, 2, \dots, n$, odnosno u matričnom obliku:

$$Ax = b, \quad A \in \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{R}), \quad x, b \in \mathbb{R}^n.$$

Dve grupe metoda za rešavanje ovog problema:

- direktne,
- iterativne. Mi se njima bavimo.

4 Sistemi nelinearnih jednačina

Rešavamo sistem oblika:

$$\begin{matrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ \vdots & \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \end{matrix} \quad \left. \right\}$$

gde su $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ neke, u opštem slučaju, nelinearne funkcije.

Razmatramo dve iterativne metode:

- Metoda iteracije,
- Metoda Njutn-Kantoroviča.

5 Polinomska interpolacija

Razmotrimo primer broja stanovnika Beograda kroz godine:

1953	1961	1971	1981	1991	2002
477982	657362	899094	1087915	1133146	1119642

Potrebno je proceniti broj stanovnika 1994. godine.

5 Polinomska interpolacija

Razmotrimo primer broja stanovnika Beograda kroz godine:

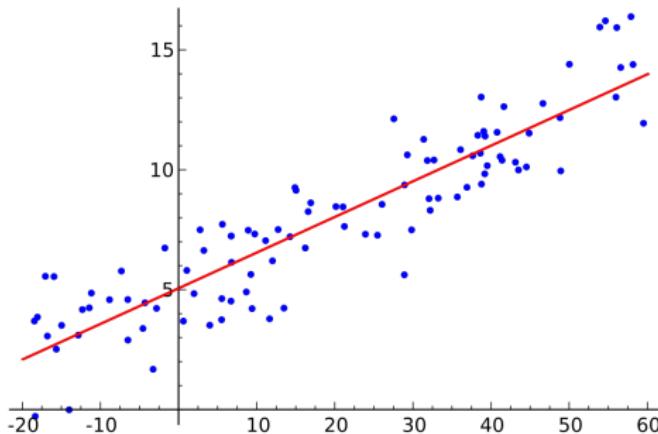
1953	1961	1971	1981	1991	2002
477982	657362	899094	1087915	1133146	1119642

Potrebno je proceniti broj stanovnika 1994. godine.

- Jedan poznati pristup ovom problemu je aproksimacija funkcije interpolacionim polinomom.
- Razmatraćemo nekoliko varijanti tog polinoma:
Lagranžov, Njutnov za neekvidistantne i Njutnov za ekvidistantne čvorove.

6 Polinomska regresija

- Drugačiji vid aproksimacije funkcije od interpolacije:
Najbolju aproksimaciju određujemo metodom najmanjih kvadrata.
- Poseban akcenat je na linearnoj regresiji.



8 Diferencijalne jednačine

Razmatraćemo Košijev problem

$$\begin{aligned}y' &= f(x, y) \\y(x_0) &= y_0.\end{aligned}$$

Na osnovu Njutn-Lajbnicove teoreme znamo da je ispunjeno

$$\int_a^x y'(t) dt = y(x) - y(a),$$

odakle je

$$y(a) = y(x) + \int_a^x f(t, y(t)) dt.$$

8 Diferencijalne jednačine

Razmatraćemo Košijev problem

$$\begin{aligned}y' &= f(x, y) \\y(x_0) &= y_0.\end{aligned}$$

Na osnovu Njutn-Lajbnicove teoreme znamo da je ispunjeno

$$\int_a^x y'(t) dt = y(x) - y(a),$$

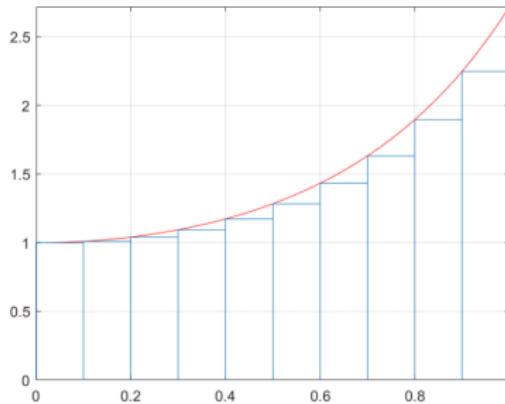
odakle je

$$y(a) = y(x) + \int_a^x f(t, y(t)) dt.$$

Potrebno nam je znanje kako da izračunamo približno integral koji se pojavio.

7 Numerička integracija

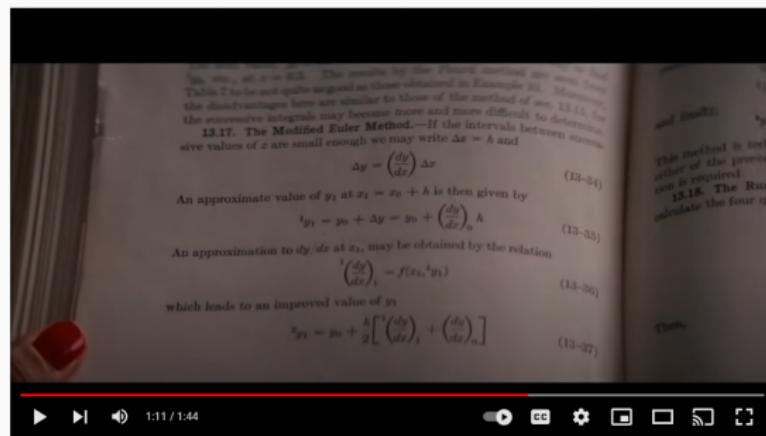
- Bavićemo se aproksimacijom integrala takozvanim kvadraturnim formulama.
- Posebno ćemo se baviti Njutn-Kotesovim kvadraturnim formulama:
 - Metoda pravougaonika,
 - Metoda trapeza,
 - Simpsonova metoda.



8 Diferencijalne jednačine

Metode koje ćemo razmatrati:

- Ojlerova metoda,
- Metode tipa Runge-Kuta.



Euler's Method scene in Hidden Figures