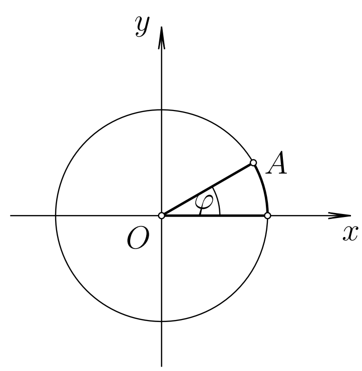
Једна прича о алгебарским структурама

• Додатни материјал из Математике 1 •

Задатак 1: *Нека је дат скуп* $G = \left\{ \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \mid \alpha \in [0, 2\pi) \right\}$, *и нека је* $*$ *операција множења матрица. Испитати да ли је* $(G, *)$ *група. Да ли је* $(G, *)$ *Абелова група?*

Претходни задатак је класичан задатак из ове области, и можете га вежбе ради решити пре него што наставите са читањем овог текста. Оно чиме ћемо се ми више бавити је проницање у то шта стоји иза кулиса овог задатка, како је некоме пало на памет да такав задатак постави (и зада га на неком од ранијих рокова).

Посматрајмо стандардну јединичну кружницу у равни (кружница полупречника један са центром у координатном почетку O). За сваку тачку A на тој кружници је одређен један угао φ (слика 1), где је, као што је уобичајено, $(1, 0)$ посебно истакнута тачка те кружнице.



слика 1

Штавише, за координате тачке A важи $x_A = \cos\varphi$, $y_A = \sin\varphi$. Нека је тачка B добијена ротацијом тачке A за угао ψ око координатног почетка (у наставку се подразумева око које тачке се врши ротација). Тада је за њене координате испуњено $(x_B, y_B) = (\cos(\varphi + \psi), \sin(\varphi + \psi))$. Користећи се основним тригонометријским идентитетима, видимо да важи:

$$\begin{aligned} X_B = \begin{bmatrix} \cos(\varphi+\psi) \\ \sin(\varphi+\psi) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi \\ \sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi \\ \sin\psi & \cos\psi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{bmatrix} \qquad (1) \\ &= \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi \\ \sin\psi & \cos\psi \end{bmatrix} \cdot X_A. \end{aligned}$$

У последњем реду се појављује матрица која управо припада нашем скупу. Таква матрица је позната и као *матрица ротације*, из очигледног разлога. Ради лакшег записа, означимо је са $\mathcal{R}_\psi$.

Уколико сада ротирамо тачку B за угао ϕ, добићемо тачку C која се може посматрати и као тачка добијена ротацијом тачке A за угао $\psi + \phi$. Тада на основу (1) важи:

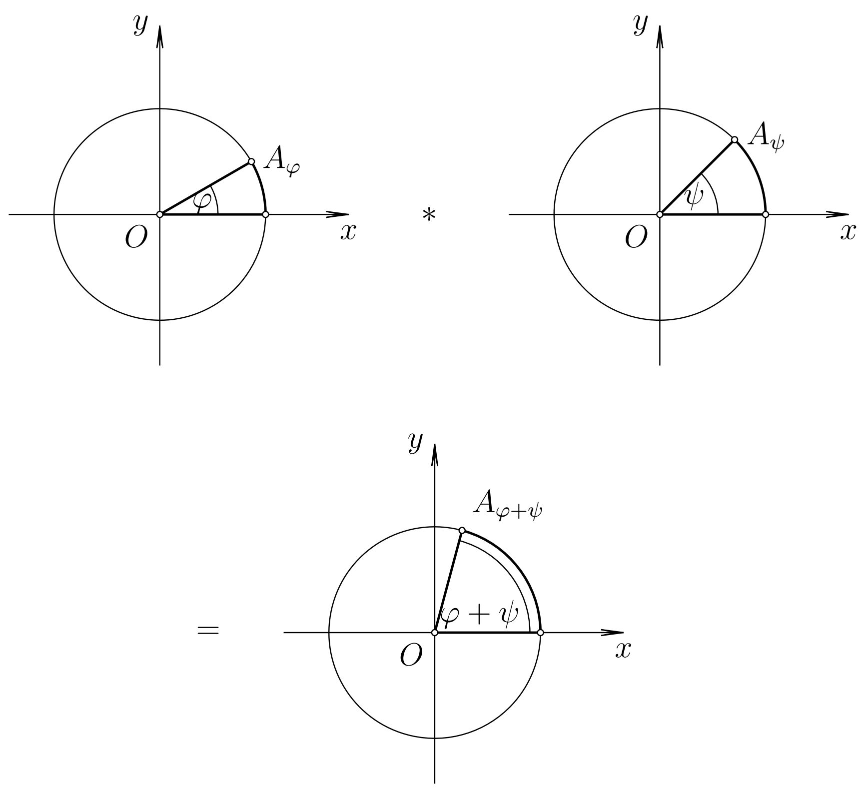
$$X_C = \mathcal{R}_\phi \cdot X_B = \mathcal{R}_\phi \cdot (\mathcal{R}_\psi \cdot X_A) = (\mathcal{R}_\phi \cdot \mathcal{R}_\psi) \cdot X_A,$$

па одатле следи да је

$$\mathcal{R}_{\phi+\psi} = \mathcal{R}_\phi \cdot \mathcal{R}_\psi. \tag{2}$$

Нимало случајно, дејство две везане ротације се описује множењем матрица ротације, што је операција дата у задатку.

Тачка A са слике 1 се може посматрати као тачка која је добијена ротацијом тачке $(1, 0)$ за угао φ, односно свака ротација ће бити једнозначно одређена сликом те тачке. У даљем тексту ћемо тачку $(1, 0)$ означавати са S, јер је већ посебно истичемо, па би био ред да је посебно и означимо (могли смо за њену улогу да изаберемо и било коју другу тачку на кругу). На слици 2 је дат графички приказ коришћења операције $*$ за две ротације $\mathcal{R}_\varphi$ и $\mathcal{R}_\psi$:



слика 2

Претходна слика би требало да нам у наставку пружи довољну помоћ да одговоримо на нека питања, без да спустимо оловку на папир.

Преведимо сада задатак испитивања да ли је структура $(G, *)$ група на језик ротација:

1. *затвореност:* Ако узмемо два елемента, $\mathcal{R}_\varphi$, $\mathcal{R}_\psi$, тада је питање да ли елемент $\mathcal{R}_\varphi * \mathcal{R}_\psi$ припада скупу G еквивалентно томе да ли постоји ротација која тачку S шаље у крајњу тачку добијену тим двема ротацијама. Очигледно је одговор потврдан, јер какву год ми композицију ротација правили, крајња тачка мора припадати кружници, а тачку S можемо одговарајућом ротацијом дотерати до било које тачке кружнице! У овом конкретном случају, та ротација ће бити $\mathcal{R}_{\varphi+\psi}$ или, у случају да је $\varphi + \psi > 2\pi$, биће $\mathcal{R}_{\varphi+\psi-2\pi}$.

2. *асоцијативност и комутативност:* Како је ово у основи неформална прича, овде ћемо дозволити себи слободу да се ослонимо на интуицију: Пошто смо изједначили елементе скупа G са ротацијама, требало би да буде јасно да нам не прави разлику којим редом вршимо ротације, и да не постоји нека приоритетност међу више ротација. За оне који нису уверени, формалан аргумент следи из (2) и комутативности и асоцијативности сабирања реалних бројева.

3. *неутрал:* Формулишимо питање на следећи начин: Ако смо већ извршили једну ротацију, за који угао треба ротирати добијену тачку тако да она остане у месту? Јасно је ваљда да то треба да буде нула-угао. За тај угао је одговарајућа матрица ротације управо јединична матрица. Пошто ништа не мења, таква ротација се назива идентично пресликавање или идентитет.

4. *инверз:* Опет се вратимо мисаоном експерименту. Претпоставимо да смо извршили ротацију за угао φ којом смо тачку S послали у неку тачку A_φ. Питамо се сада, знајући да је неутрал идентично пресликавање, какву ротацију да изведемо па да тачка A_φ оде у тачку S? Поново, одговор би требало да је очигледан, треба извршити ротацију за угао $2\pi - \varphi$, сем у случају да је $\varphi = 0$, када би и друга ротација била за нула-угао. Са неким другачијим условом у скупу G, инверзни угао би могао бити $-\varphi$ (размислите какав би ту услов могао да стоји). Дакле, за сваки елемент скупа G постоји њему инверзни елемент у том скупу.

На основу претходних тачака, са великом сигурношћу можемо тврдити да је $(G, *)$ Абелова група. Формалним, прецизним доказивањем се та тврдња може и аргументовати, што се читаоцу и саветује. Оно што је ипак циљ овог текста је развијање неке интуиције о самој структури $(G, *)$ и стварање неке свести о геометријској природи те структуре.

$*\quad *\quad *$

Приметимо да смо могли да разматрамо и еквивалентан задатак у коме би скуп био $G = \left\{ \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R},\ a^2 + b^2 = 1 \right\}$. Касније ћемо разматрати да ли је услов $a^2 + b^2 = 1$ неопходан.

Размотримо још један пример:

Задатак 2: *Нека је дат скуп* $G = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid a^2 + b^2 = 1\}$, *и нека за операцију* $*$ *важи* $(a,b) * (c,d) = (ac - bd, bc + ad)$. *Испитати да ли је* $(G,*)$ *група. Да ли је* $(G,*)$ *Абелова група?*

Ово је такође један класичан задатак из ове теме, који би студент требало без проблема да зна да реши. У овом тренутку се читалац саветује да реши задатак на стандардан начин пре него што настави са даљим читањем. Ми се, наравно, нећемо само тиме задовољити, јер желимо да стекнемо ширу слику о овом задатку.

Услов $a^2 + b^2 = 1$ у скупу G нам говори да, геометријски, скуп G одговара јединичној кружници у равни. Вратимо се на кратко на слику 2. Означимо координате тачке A_φ са (a,b) а координате тачке A_ψ са (c,d), што значи да је:

$$(a,b) = (\cos\varphi, \sin\varphi),$$
$$(c,d) = (\cos\psi, \sin\psi).$$

Тада је

$$\begin{aligned} A_{\varphi+\psi} &= (\cos(\varphi+\psi), \sin(\varphi+\psi)) \\ &= (\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi, \sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi) \\ &= (ac - bd, bc + ad), \end{aligned} \tag{3}$$

што је управо резултат операције $*$ у скупу G! Дакле, сваком елементу скупа G одговара једна тачка са јединичне кружнице, а на основу претходног задатке, тиме је одређена и једна ротација. На основу (3) смо утврдили да се и операција $*$ слаже са операцијом композиције две ротације, односно у овом задатку је опет скривена иста прича о ротацијама коју смо разматрали и у задатку 1.

Сада би требало да је интуитивно јасно да је $(G,*)$ Абелова група. Пошто смо имали да неутрал одговара ротацији за нула-угао, требало би да важи:

$$(e_1, e_2) = (\cos 0, \sin 0) = (1, 0).$$

Пратећи тачку 4. из претходног задатка, очекујемо да ће инверз елемента $(a,b) = (\cos\varphi, \sin\varphi)$, $\varphi \neq 0$, да буде елемент

$$(\overline{a}, \overline{b}) = (\cos(2\pi - \varphi), \sin(2\pi - \varphi)) = (\cos\varphi, -\sin\varphi) = (a, -b).$$

Ако сте формално испитали особине ове алгебарске структуре, сигурно сте добили те исте вредности за неутрал и инверз.

*   *   *

Уместо реалне равни, могли смо посматрати и комплексну раван, односно могли смо радити и са скупом

$$K = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}. \tag{4}$$

Да бисмо разматрали еквивалентан проблем потребно је и да одредимо одговарајући операцију уместо $*$. Уочимо следећу чињеницу:

Уколико су дати комплексни бројеви

$$z_1 = a + bi,$$
$$z_2 = c + di,$$

тада је

$$z_1 \cdot z_2 = (a + bi)(c + di) = ac - bd + i(bc + ad),$$

односно реалан и имагинаран део производа управо одговарају координатама $(a, b) * (c, d)$ у скупу G!

Дакле, проблем еквивалентан задатку 2 би био да испитамо да ли је $(K, \cdot)$ Абелова група, где је $\cdot$ операција множења комплексних бројева.

Оно што нам је омогућило природан прелазак на скуп комплексних бројева је то што постоји очигледна идентификација комплексног броја са уређеним паром: Реалном делу одговара прва а имагинарном друга координата - та два дела се суштински разликују. Самим тим, не можемо записати комплексан број на два различита начина. Покушајте да то доведете у везу са примером са вежби где је разматран скуп $\left\{x + y\sqrt{2} \mid x, y \in \mathbb{Q}\right\}$ (обратите пажњу на то што су x и y рационални а $\sqrt{2}$ ирационалан број).

* * *

У свим досадашњим примерима смо радили само са јединичном кружницом, те смо имали услов да је модуо сваког елемента скупа једнак 1. Ипак, претходна прича ће важити и за мање ригидан услов по ком је довољно да модуо само буде различит од нуле, те ће за исту операцију $*$ у сваком од случајева, одговарајућа структура $(G, *)$ бити Абелова група, што можете одмах проверити и сами.

У наставку ћемо понудити идеју како би се геометријски могло доћи до операције $*$ у скупу $G = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a^2 + b^2 \neq 0\}$, тако да се за елементе на јединичној кружници ради о истој операцији као и раније:

Ако је $X = (a, b)$ нека тачка у равни (елемент $\mathbb{R}^2$) различита од координатног почетка O, тада њој одговара тачка

$$X' = \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)$$

која ће припадати јединичној кружници. Тиме је дефинисано пресликавање које сваку тачку скупа $\mathbb{R}^2 \backslash \{O\}$ пресликава на јединичну кружницу. Ако је $|X| = \sqrt{a^2 + b^2}$, тада се X' може записати као

$$X' = \frac{X}{|X|}. \tag{5}$$

Уколико су X и Y неке две тачке из $\mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$, тада је по ранијој причи познато шта је $X' * Y'$, јер су то елементи са јединичне кружнице. Оно што желимо је да операција $*$ буде дефинисана и на ширем скупу, тако да и $X * Y$ има смисла. Није претерано да очекујемо да истовремено важи

$$X' * Y' = Z' \tag{6}$$

и

$$X * Y = Z. \tag{7}$$

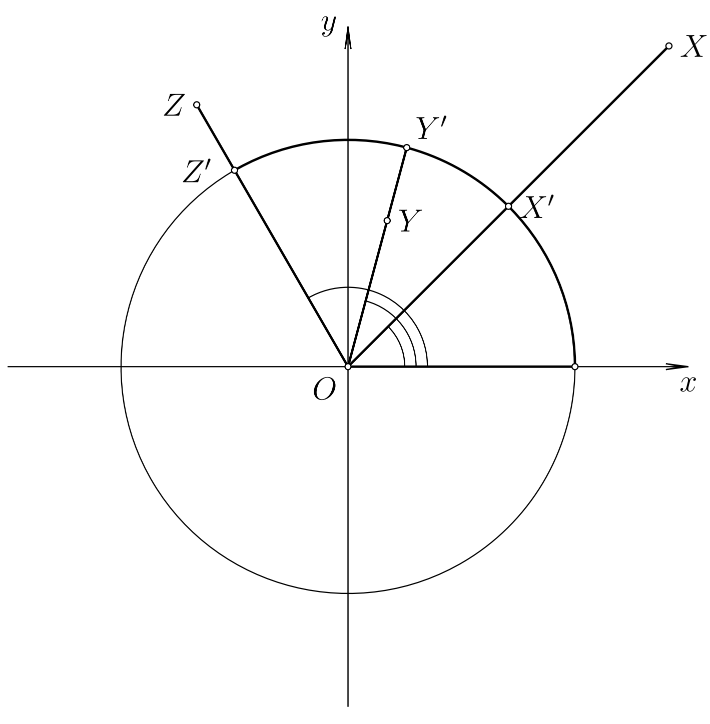
Користећи (5), можемо да запишемо (6) као

$$X' * Y' = \frac{Z}{|Z|}.$$

Инспирисани тиме, узећемо да је $|Z| = |X||Y|$ и:

$$Z = X * Y := |X||Y|(X' * Y').$$

Дакле, ако су X и Y две тачке из $\mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$, тада се $X * Y$ добија на следећи начин: Пресликамо X и Y на јединичну кружницу, извршимо одговарајућу ротацију како бисмо добили $Z' = X' * Y'$ а затим скалирамо $\overrightarrow{OZ'}$ са $|X||Y|$, тако да добијемо $\overrightarrow{OZ}$, односно тачку $Z = X * Y$ (слика 3).



слика 3

Проверите рачунски да су за $X = (a, b)$ и $Y = (c, d)$ координате овако добијене тачке Z баш $(ac - bd, bc + ad)$! Покушајте да одрадите и читав посао испитивања да ли је $(G, *)$ Абелова група само уз помоћ геометријске интуиције.