Вандермондова матрица и полиномска интерполација

• Додатни материјал из Математике 1 •

Вандермондова матрица

Наредна квадратна матрица реда $n+1$ је позната као *Вандермондова* матрица:

$$V_n = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{bmatrix}.$$

Оно чиме ћемо се најпре бавити је рачунање детерминанте ове матрице, а то ћемо извести коришћењем особина детерминанте. Познато је да ако некој врсти, односно колони додамо неку другу врсту, односно колону помоножену реалним бројем, детерминанта не мења своју вредност.

За почетак, $(n+1)$-ој колони ћемо додати n-ту колону помножену са $-x_0$. Слично, n-тој колони ћемо додати $(n-1)$-у колону помножену са $-x_0$, и настављајући процес за све остале колоне, на крају ћемо другој колони додати прву помножену са $-x_0$. Дакле, важи:

$$\det V_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x_1 - x_0 & x_1^2 - x_0x_1 & \dots & x_1^n - x_0x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 - x_0 & x_2^2 - x_0x_2 & \dots & x_2^n - x_0x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n - x_0 & x_n^2 - x_0x_n & \dots & x_n^n - x_0x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x_1 - x_0 & (x_1 - x_0)x_1 & \dots & (x_1 - x_0)x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 - x_0 & (x_2 - x_0)x_2 & \dots & (x_2 - x_0)x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n - x_0 & (x_n - x_0)x_n & \dots & (x_n - x_0)x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Даље, користећи Лапласов развој за прву врсту, а затим и чињеницу да у добијеној детерминанти сви елементи једне врсте имају заједнички чинилац, добијамо:

$$\det V_n = \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & (x_1 - x_0)x_1 & \dots & (x_1 - x_0)x_1^{n-1} \\ x_2 - x_0 & (x_2 - x_0)x_2 & \dots & (x_2 - x_0)x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n - x_0 & (x_n - x_0)x_n & \dots & (x_n - x_0)x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= (x_1 - x_0)(x_2 - x_0)\cdots(x_n - x_0) \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

На основу претходног смо показали да важи

$$\det V_n = \prod_{i=1}^{n}(x_i - x_0)\det V_{n-1},$$

где је

$$V_{n-1} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \prod_{i=1}^{n}(x_i - x_0) := (x_1 - x_0)(x_2 - x_0)\cdots(x_n - x_0),$$

односно V_{n-1} је опет једна Вандермондова матрица, само за ред мања! Примењујући поново претходни поступак, можемо показати да је

$$\det V_{n-1} = (x_2 - x_1)\cdots(x_n - x_1)\begin{vmatrix} 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-2} \end{vmatrix} = \prod_{i=2}^{n}(x_i - x_1)\det V_{n-2},$$

односно опет смо свели проблем на рачунање детерминанте Вандермондове матрице мањег реда. Овај поступак ћемо понављати све док не стигнемо до

$$\det V_1 = (x_n - x_{n-1})\det V_0 = x_n - x_{n-1},$$

јер је $\det V_0 = \det[1] = 1$. Коначно, узевши све у обзир имамо да важи

$$\det V_n = \left(\prod_{i=1}^{n}(x_i - x_0)\right)\left(\prod_{i=2}^{n}(x_i - x_1)\right)\cdots\left(\prod_{i=n-1}^{n}(x_i - x_{n-2})\right)(x_n - x_{n-1}),$$

што се може краће записати и као:

(1) $$\det V_n = \prod_{0\le j<i\le n}(x_i - x_j).$$

Полиномска интерполација

Посматрајмо један реалан проблем. У наредној табели је дат број становника у Београду у различитм годинама. Потребно је нпр. проценити број становника 1969. године, када је донета одлука о оснивању Факултета организационих наука.

1953	1961	1971	1981	1991	2002	2011
477982	657362	899094	1087915	1133146	1119642	1233796

Претходни задатак ћемо разматрати у једном општијем руху. Претпоставимо да нам је позната вредност неке функције f у међусобно различитим тачкама (чворовима) x_0, x_1, ..., x_n, али не и сама функција. Разумно је претпоставити да је функција релативно ,,лепа”, нпр. непрекидна, те да има смисла бавити се проблемом (вредности функције нису насумичне). Циљ нам је да одредимо функцију која представља апроксимацију непознате функције тако да имају исте вредности у датим тачкама.

У овом тексту ћемо ту апроксимациону функцију тражити у скупу полинома. Оно што се одмах намеће као питање је да ли такав полином уопште постоји. Потврдан одговор даје наредна теорема:

Теорема Постоји јединствен полином степена не већег од n, за који важи

$$P_n(x_k) = f(x_k), \;\; k = 0, 1, ..., n,$$

за унапред познате парове $(x_k, f(x_k))$, $k = 0, 1, ..., n$, уз услов $x_i \neq x_j$ за $i \neq j$.

Доказ: Показаћемо да постоји полином $P_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, који испуњава тражени услов. Оно што је наш задатак заправо је да покажемо да постоји јединствена $n+1$-торка бројева $(a_0, a_1, ..., a_n)$ за коју је испуњено:

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 x_0 + \cdots + a_n x_0^n &= f(x_0) \\ a_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_n x_1^n &= f(x_1) \\ &\vdots \\ a_0 + a_1 x_n + \cdots + a_n x_n^n &= f(x_n), \end{aligned}$$

односно у матричном облику:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix}.$$

Егзистенција и јединственост решења ове матричне једначине, односно система једначина, управо зависи од тога да ли је матрица система регуларна. Међутим, матрица система је Вандермондова матрица о којој је било речи раније, па пошто важи $x_i \neq x_j$, $i \neq j$, то из (1) очигледно следи да је њена детерминанта различита од нуле! Тиме смо директно доказали и тврђење теореме. $\square$

Полином из претходне теореме је познат и као *интерполациони полином* степена n, а може се показати и да је он експлицитно дат са

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j} f(x_k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(x - x_0)\cdots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\cdots(x - x_n)}{(x_k - x_0)\cdots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\cdots(x_k - x_n)} f(x_k). \end{aligned} \tag{2}$$

Дакле, вредност непознате функције f у некој тачки x^*, различитој од датих тачака x_i, $i = 0, 1, ..., n$, се апроксимира вредношћу $P_n(x^*)$ која се једноставно рачуна из формуле (2).

Враћајући се на почетни задатак, где чворови представљају године, а вредности функције представљају број становника у одговарајућој години, 1969. године је у Београду било приближно 850438 становника.