Ојлеров број e је ирационалан

• Додатни материјал из Математике 1 •

Један од најпознатијих бројева у математици је свакако Ојлеров број e. Иако носи Ојлерово име, овај значајан број се у математици појављује доста раније, у радовима математичара 17. века на тему логаритама. У раду Јакова Бернулија, представника истакнуте породице математичара и физичара, број e се, неочекивано, појављује као гранична вредност низа који је Бернули изучавао док се бавио питањем камата.

Број e представља следећу граничну вредност:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Конвергентност горњег низа је показана у уџбенику из Математике 1.

Број e има још доста занимљивих особина, од којих је неке показао управо Ојлер, те се број с правом доводи у вези са његовим именом. Подсетимо се познатог Ојлеровог идентитета:

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

Важи и следећи идентитет:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!},$$

где је $k!$ (k факторијел) производ свих природних бројева између 1 и k. Специјално, $0! = 1$. Из овог идентитета се може утврдити да је $e \in (2,3)$: Са једне стране, јасно је да је $e > 2$, а са друге имамо:

$$\begin{aligned} e &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}\cdots < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 2\cdot 2} + \cdots \\ &= 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 2 + 1 = 3. \end{aligned}$$

Претходно извођење је било мало неформално, али нам за формализам треба знање појма реда, што је ипак градиво Математике 2. Може се показати да је $e = 2.7182818...$

Такође, број e може видети и као вредност $f(1)$, где је f јединствена функција која задовољава једначину $f'(x) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, уз услов $f(0) = 1$. Та функција је управо нама позната као $f(x) = e^x$.

Оно што ће нама у наставку бити најзначајније је знање дела градива у вези са Маклореновим полиномом, и Лагранжовим обликом остатка тог полинома. Наиме, функција $f(x) = e^x$ је бесконачно диференцијабилна, и за произвољно $k \in \mathbb{N}$ и $x \in \mathbb{R}$ важи

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^k}{k!} + \frac{e^{\theta x}}{(k+1)!}x^{k+1},$$

за неко $\theta \in (0,1)$. Специјално, за $x = 1$ је испуњено

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{k!} + \frac{e^{\theta}}{(k+1)!}.$$

Докажимо сада да је e заиста ирационалан број: Претпоставимо супротно, да постоје $m, n \in \mathbb{N}$, такви да је $e = \frac{m}{n}$. Тада важи

$$\frac{m}{n} = e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{e^{\theta}}{(n+1)!}.$$

Множењем обе стране са $n!$, добијамо

$$\underbrace{m \cdot n!}_{\in \mathbb{N}} = \underbrace{\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) n!}_{\in \mathbb{N}} + \frac{e^{\theta}}{n+1},$$

одакле закључујемо да мора важити $\frac{e^{\theta}}{n+1} \in \mathbb{N}$. Како је $\theta \in (0,1)$, то је

$$\frac{1}{n+1} < \frac{e^0}{n+1} < \frac{e^{\theta}}{n+1} < \frac{e^1}{n+1} < \frac{3}{n+1},$$

односно мора постојати природан број између $\frac{1}{n+1}$ и $\frac{3}{n+1}$. Јасно је да то није могуће уколико је $n \geq 2$. Са друге стране, ако је $n = 1$, онда мора бити $e = \frac{m}{1} = m \in \mathbb{N}$, што није могуће, јер смо већ утврдили да је $e \in (2,3)$. Тиме смо добили контрадикцију са претпоставком да је e рационалан број, чиме смо показали тврђење из наслова!

Наведимо још за крај да је, осим што је ирационалан, број e такође и *трансцендентан* број, што значи да није корен никојег (не-нула) полинома са рационалним коефицијентима.