

Дискретне математичке структуре

Исказни рачун

Задатак 1

Аца, Браца, Пера и Жика су студенти ФОН-а и свако од њих је или информатичар или менаџер. У вези тога су дати следећи искази:

I: Ако је Аца менаџер, онда су Браца и Пера обојица информатичари или су обојица менаџери.

II: Ако је Браца менаџер, онда Пера и Жика нису обојица менаџери.

III : Пера је информатичар ако и само ако је бар један од Жике и Аце информатичар.

IV : Тачно један од Жике и Браце је информатичар.

а) Да ли су ови искази непротивречни? Да ли међу њима има логички еквивалентних исказа?

б) За кога од ових студената се са сигурношћу може утврдити да ли је информатичар или менаџер?

в) За добијену исказну формулу F одредити СДНФ, минималну ДНФ и једну КНФ, а за исказну формулу која одговара I исказу одредити СКНФ, минималну КНФ и једну ДНФ.

Решење

a = "Аца је информатичар."

b = "Браца је информатичар."

c = "Пера је информатичар."

d = "Жика је информатичар."

$$I : \quad \neg a \Rightarrow (b \Leftrightarrow c)$$

$$II : \quad \neg b \Rightarrow (c \vee d)$$

$$III : \quad c \Leftrightarrow (a \vee d)$$

$$IV : \quad b \underline{\vee} d$$

$$F = I \wedge II \wedge III \wedge IV$$

a	b	c	d	$I : \neg a \Rightarrow (b \Leftrightarrow c)$	$II : \neg b \Rightarrow (c \vee d)$	$III : c \Leftrightarrow (a \vee d)$	$IV : b \underline{\vee} d$	F
0	0	0	0	1	0	1	0	0
0	0	0	1	1	1	0	1	0
0	0	1	0	0	1	0	0	0
0	0	1	1	0	1	1	1	0
0	1	0	0	0	1	1	1	0
0	1	0	1	0	1	0	0	0
0	1	1	0	1	1	0	1	0
0	1	1	1	1	1	1	0	0
1	0	0	0	1	0	0	0	0
1	0	0	1	1	1	0	1	0
1	0	1	0	1	1	1	0	0
1	0	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	0	1	0
1	1	0	1	1	1	0	0	0
1	1	1	0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	0	0

а) Да ли су ови искази непротивречни? Да ли међу њима има логички еквивалентних исказа?

Изрази су непротивречни јер $v(F)$ није увек 0. Како међу колонама I, II, III и IV нема истих колона нема ни логички еквивалентних израза.

б) За кога од ових студената се са сигурношћу може утврдити да ли је информатичар или менаџер?

У оба могућа случаја исказне променљиве a и c имају вредност 1 што значи да су Аца и Пера информатичари. За Брацу и Жику се то не може са сигурношћу утврдити.

в) За добијену исказну формулу F одредити СДНФ, минималну ДНФ и једну КНФ, а за исказну формулу која одговара I исказу одредити СКНФ, минималну КНФ и једну ДНФ.

За формулу F :

СДНФ: $(a \wedge \neg b \wedge c \wedge d) \vee (a \wedge b \wedge c \wedge \neg d)$ што је уједно и минимални ДНФ.

КНФ: $a \wedge c \wedge (b \vee d) \wedge (\neg b \vee \neg d)$

За формулу I :

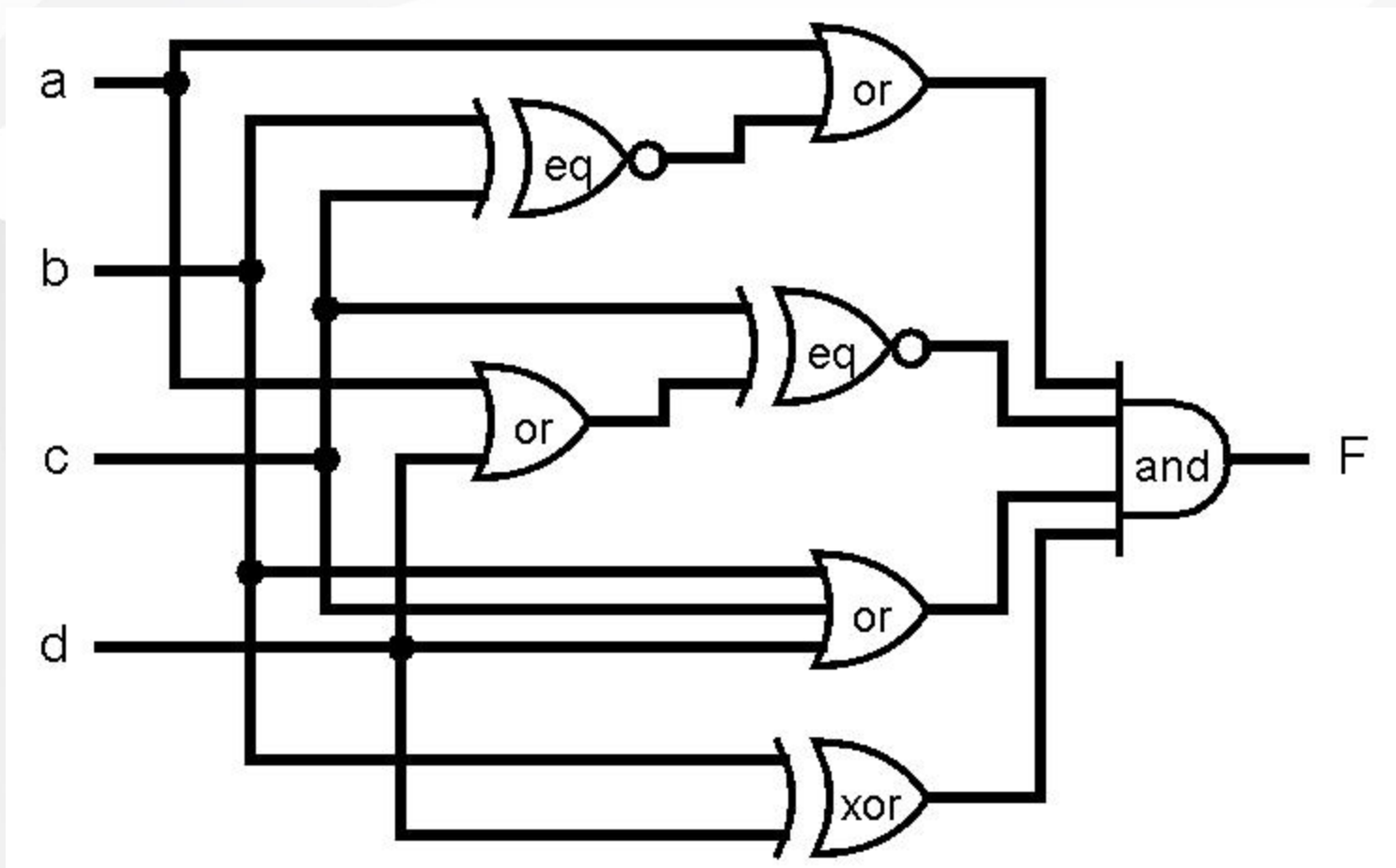
СКНФ: $(a \vee b \vee \neg c \vee d) \wedge (a \vee b \vee \neg c \vee \neg d) \wedge (a \vee \neg b \vee c \vee d) \wedge (a \vee b \vee c \vee \neg d)$

Минимални КНФ: $(a \vee b \vee \neg c) \wedge (a \vee \neg b \vee c)$

ДНФ: $a \vee (b \wedge c) \vee (\neg b \wedge \neg c)$

Задатак 2

Одредити исказну формулу F :



Решење

$$F = (a \vee (b \Leftrightarrow c)) \wedge (c \Leftrightarrow (a \vee d)) \wedge (b \vee c \vee d) \wedge (b \underline{\vee} d)$$

Овим логичким колом је представљена иста исказна формула као у првом задатку.

Задатак 3

Декан жели да изабере продекане међу наставницима Ацом, Бошком, Цецом, и Душком. У вези тога дати су следећи искази:

I: Ако декан изабере Ацу онда ће изабрати и Бошка.

II: Декан ће изабрати Бошка или Цецу ако и само ако не изабере Ацу.

III : Декан ће изабрати Бошка или ће међу Душком и Ацом изабрати тачно једног од њих.

IV : Ако декан изабере Цецу и Душку онда ће изабрати и Бошка.

а) Да ли су ови искази непротивречни? Да ли међу њима има логички еквивалентних исказа?

б) За кога од ових наставника се са сигурношћу може утврдити да ће бити изабран за продекана? Да ли се може утврдити колико ће укупно продекана бити изабрано?

в) За добијену исказну формулу F одредити СДНФ, минималну ДНФ и једну КНФ, а за исказну формулу која одговара *IV* исказу одредити СКНФ, минималну КНФ и једну ДНФ.

Решење

a = "Декан ће изабрати Ацу."

b = "Декан ће изабрати Бошка."

c = "Декан ће изабрати Цецу"

d = "Декан ће изабрати Душку."

$I : a \Rightarrow b$

$II : (b \vee c) \Leftrightarrow \neg a$

$III : b \vee (d \underline{\vee} a)$

$IV : (c \wedge d) \Rightarrow b$

$F = I \wedge II \wedge III \wedge IV$

a	b	c	d	$I : a \Rightarrow b$	$II : (b \vee c) \Leftrightarrow \neg a$	$III : b \vee (d \vee a)$	$IV : (c \wedge d) \Rightarrow b$	F
0	0	0	0	1	0	0	1	0
0	0	0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	1	1	0	1	0
0	0	1	1	1	1	1	0	0
0	1	0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1	1	1	0
1	0	0	1	0	1	0	1	0
1	0	1	0	0	0	1	1	0
1	0	1	1	0	0	0	0	0
1	1	0	0	1	0	1	1	0
1	1	0	1	1	0	1	1	0
1	1	1	0	1	0	1	1	0
1	1	1	1	1	0	1	1	0

а) Да ли су ови искази непротивречни? Да ли међу њима има логички еквивалентних исказа?

Изрази су непротивречни јер $v(F)$ није увек 0. Како међу колонама I, II, III и IV нема истих колона нема ни логички еквивалентних израза.

б) За кога од ових наставника се са сигурношћу може утврдити да ће бити изабран за продекана? Да ли се може утврдити колико ће укупно продекана бити изабрано?

У четири могућа случаја исказне променљива b има вредност 1 што значи да ће Бошко бити изабран за продекана. Такође видимо да ће бити изабрано највише три а најмање један продекан.

в) За добијену исказну формулу F одредити СДНФ, минималну ДНФ и једну КНФ, а за исказну формулу која одговара IV исказу одредити СКНФ, минималну КНФ и једну ДНФ.

За формулу F :

СДНФ: $(\neg a \wedge b \wedge \neg c \wedge \neg d) \vee (\neg a \wedge b \wedge \neg c \wedge d) \vee (\neg a \wedge b \wedge c \wedge \neg d) \vee (\neg a \wedge b \wedge c \wedge d)$

Минимална ДНФ: $\neg a \wedge b$, а уједно и једна КНФ.

За формулу IV :

СКНФ: $(a \vee b \vee \neg c \vee \neg d) \wedge (\neg a \vee b \vee \neg c \vee \neg d)$

Минимални КНФ: $b \vee \neg c \vee \neg d$, а уједно и једна ДНФ.

Задатак 4

Дата је скуповна формула F :

$$((A \cup B) \setminus C) \cap D \subseteq (A \Delta C) \cap (B \Delta D)$$

- а) Представити F као исказну формулу.
- б) Да ли је скуповна формула увек тачна?
- в) За добијену исказну формулу одредити СКНФ, минималну КНФ и једну ДНФ а за исказну формулу која одговара левој страни формуле F одредити СДНФ, минималну ДНФ и једну КНФ.

Решење

a) Представити F као исказну формулу.

$$a = "x \in A"$$

$$b = "x \in B"$$

$$c = "x \in C"$$

$$d = "x \in D"$$

$$F : ((a \vee b) \wedge \neg c) \wedge d \Rightarrow (a \underline{\vee} c) \wedge (b \underline{\vee} d)$$

a	b	c	d	$L : ((a \vee b) \wedge \neg c) \wedge d$	$D : (a \vee c) \wedge (b \vee d)$	F
0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	1	0	0	1
0	0	1	0	0	0	1
0	0	1	1	0	1	1
0	1	0	0	0	0	1
0	1	0	1	1	0	0
0	1	1	0	0	1	1
0	1	1	1	0	0	1
1	0	0	0	0	0	1
1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0	1
1	0	1	1	0	0	1
1	1	0	0	0	1	1
1	1	0	1	1	0	0
1	1	1	0	0	0	1
1	1	1	1	0	0	1

б) Да ли је скуповна формула увек тачна?

Не, одговарајућа исказна формула F није таутологија.

в) За добијену исказну формулу одредити СКНФ, минималну КНФ и једну ДНФ а за исказну формулу која одговара левој страни формуле F одредити СДНФ, минималну ДНФ и једну КНФ.

За формулу F :

СКНФ: $(a \vee \neg b \vee c \vee \neg d) \wedge (\neg a \vee \neg b \vee c \vee \neg d)$

Минимални КНФ: $\neg b \vee c \vee \neg d$, што је уједно и један ДНФ.

За формулу L :

СДНФ: $(\neg a \wedge b \wedge \neg c \wedge d) \vee (a \wedge \neg b \wedge \neg c \wedge d) \vee (a \wedge b \wedge \neg c \wedge d)$

Минимални ДНФ: $(b \wedge \neg c \wedge d) \vee (a \wedge \neg c \wedge d)$

КНФ: $(a \vee b) \wedge \neg c \wedge d$

Задатак 5

За формулу $F = (a \vee \neg b \vee \neg c \vee d) \wedge (a \vee \neg b \vee \neg c \vee \neg d) \wedge (\neg a \vee b \vee \neg c \vee d) \wedge (\neg a \vee b \vee \neg c \vee \neg d)$ дату у СКНФ-у одредити минималну КНФ и једну ДНФ.

Решење

Минимална КНФ: $(a \vee \neg b \vee \neg c) \wedge (\neg a \vee b \vee \neg c)$

ДНФ: $(a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b) \vee \neg c$

Задатак 6

За формулу $F = (\neg a \wedge \neg b \wedge \neg c) \vee (\neg a \wedge \neg b \wedge c) \vee (\neg a \wedge b \wedge \neg c) \vee (\neg a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge \neg b \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge c)$ дату у СДНФ-у одредити минималну ДНФ и једну КНФ.

Решење

Минимална ДНФ: $\neg a \vee c$, што је уједно и једна КНФ.