Број индекса: Име и презиме: Вукашин Брковић

| | |
|---|---|
| 1. | 25 |
| 2. | 25 |
| 3. | 25 |
| 4. | 25 |
| $\Sigma$ | 100 |

**1.** $z^2+(2x-y)^2+yz+4x^2=2 \;/'_x\,/'_y$

$z'_x(2z+y)=-16x+4y$ (2)

$z'_y(2z+y)=4x-2y-z$ (2)

Стационарне тачке: $z'_x=0,\ z'_y=0 \Rightarrow y=4x,\ z=-4x$. Заменом у почетну једначину добијамо: $(-4x)^2+(2x-4x)^2+4x(-4x)+4x^2=2 \iff 16x^2+4x^2-16x^2+4x^2=2 \iff 4x^2=1$, одакле је $x=\pm\frac{1}{2}$, па су стационарне тачке $S_1(\frac{1}{2},2)$ и $S_2(-\frac{1}{2},-2)$, при чему је $z(S_1)=-2$ и $z(S_2)=2$ (6). Даље, диференцирањем $z'_x$ и $z'_y$ добијамо:

$z''_{xx}(2z+y)=-16-2(z'_x)^2$ (2) $\quad z''_{xy}(2z+y)=4-z'_x-2z'_xz'_y$ (2) $\quad z''_{yy}(2z+y)=-2-2z'_y-2(z'_y)^2$ (2)

одакле је $z''_{xx}(S_1)=8$, $z''_{xy}(S_1)=-2$, $z''_{yy}(S_1)=1$ и $z''_{xx}(S_2)=-8$, $z''_{xy}(S_2)=-2$, $z''_{yy}(S_2)=-1$ (1)

Пошто за главне миноре Хесеове матрице за одговарајућу стационарну тачку важи:

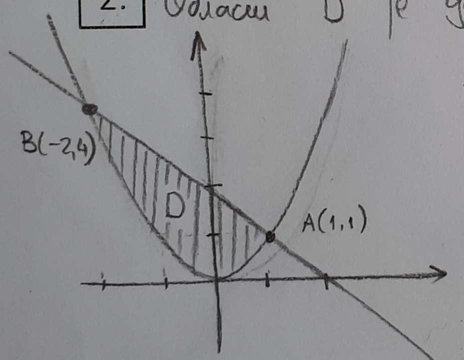
$S_1:\ D_1=8>0,\ D_2=\begin{vmatrix}8 & -2\\ -2 & 1\end{vmatrix}=4>0$ (3)

$S_2:\ D_2=-8<0,\ D_2=\begin{vmatrix}-8 & 2\\ 2 & -1\end{vmatrix}=4>0$ (3)

следи да ф-ја $z=f(x,y)$ има локални минимум у $S_1(\frac{1}{2},2)$ и локални максимум у $S_2(-\frac{1}{2},-2)$. Важи $z_{min}=-2$ (1), $z_{max}=2$ (1).

**2.** Област D је дата на слици. Пресечне тачке праве и параболе се добијају из: $\left.\begin{matrix}y=2-x\\ y=x^2\end{matrix}\right\}\ x^2=2-x \iff x^2+x-2=0 \iff (x+2)(x-1)=0$

$\iff x=-2 \vee x=1$. Одатле су тражене тачке $A(1,1)$ и $B(-2,4)$ (2). Кандидати за тачке екстремума су $A$, $B$, тачке из унутрашњости области D, тачке са сегмента $AB$ (4) лука параболе $\widehat{AB}$ и тачке




int D:

$f'_x=0,\ f'_y=0$

$\iff 2x=0,\ 2y-2=0$

$\iff x=0,\ y=1$.

$S_1(0,1)\in D$. (4)

$\overline{AB}$:

$y=2-x,\ x\in(-2,1)$

$f(x,2-x)=2x^2-2x=f_1(x)$

$f_1'(x)=4x-2 \Rightarrow f_1'(x)=0$

$\iff x=\frac{1}{2} \Rightarrow y=\frac{3}{2}$.

$S_2(\frac{1}{2},\frac{3}{2})\in D$. (4)

$\widehat{AB}$:

$y=x^2,\ x\in(-2,1)$

$f(x,x^2)=x^4-x^2=f_2(x)$

$f_2'(x)=0 \iff 4x^3-2x=0$

$\iff x(2x^2-1)=0$

$\iff x=0 \vee x=-\frac{1}{\sqrt{2}} \vee x=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$y=0 \quad y=\frac{1}{2} \quad y=\frac{1}{2}$

$S_3(0,0)\in D,\ S_4(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2})\in D,\ S_5(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2})\in D$. (8)

$f(S_1)=-1$

$f(S_2)=-\frac{1}{2}$

$f(S_3)=0$

$f(S_4)=-\frac{1}{4}$

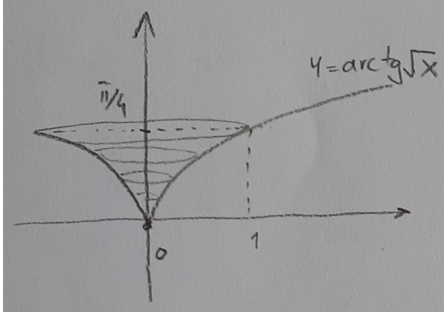
$f(S_5)=-\frac{1}{4}$

$f(A)=0$

$f(B)=12$

Дакле, $\min\limits_{x\in D} f(x)=f(0,1)=-1$ а $\max\limits_{x\in D} f(x)=f(-2,4)=12$. (3)

**3.** $\operatorname{arctg}\sqrt{x} = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = 1$. 2 Важи: $y = \operatorname{arctg}\sqrt{x},\ x \in [0,1] \Leftrightarrow x = \operatorname{tg}^2 y,\ y \in [0, \pi/4]$ 4



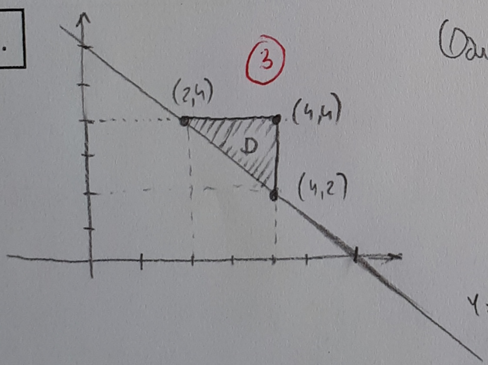

$$V = \pi \int_0^{\pi/4} x^2(y)\,dy \ (2) = \pi \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^4 y\,dy = \begin{bmatrix} t = \operatorname{tg} y \\ \frac{dt}{1+t^2} = dy \end{bmatrix} = \pi \int_0^1 \frac{t^4\,dt}{1+t^2} =$$

$$= \pi \int_0^1 \frac{t^4+t^2-t^2-1+1}{1+t^2}\,dt = \pi \int_0^1 \left(t^2 - 1 + \frac{1}{1+t^2}\right) dt =$$

$$= \pi \left(\frac{t^3}{3} - t + \operatorname{arctg} t\right)\Big|_0^1 = \pi\left(\frac{1}{3} - 1 + \frac{\pi}{4}\right) = \pi\left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}\right).$$

17

**4.**




Област D из задатка се може описати као:

$D = \{(x,y) \mid 2 \le x \le 4,\ 6-x \le y \le 4\}$ 2. Важи:

$$I = \iint_D \frac{1}{2x^2+x^3}\,dx\,dy = \int_2^4 \left(\int_{6-x}^4 \frac{1}{2x^2+x^3}\,dy\right) dx =$$

$$= \int_2^4 \frac{1}{2x^2+x^3}(y)\Big|_{6-x}^4\,dx = \int_2^4 \frac{x-2}{x^2(x+2)}\,dx \ (5) =$$

$$= \int_2^4 \left(-\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) dx = \left(-\ln|x+2| + \ln|x| + \frac{1}{x}\right)\Big|_2^4$$

$$= \ln\frac{4}{3} - \frac{1}{4}.$$

10

$$\frac{x-2}{x^2(x+2)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x^2}$$

$$x - 2 = Ax^2 + Bx^2 + B\cdot 2x + Cx + 2C$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A + B = 0 \\ 2B + C = 1 \\ 2C = -2 \end{cases} \quad A = -1,\ B = 1,\ C = -1$$

$$\Rightarrow \frac{x-2}{x^2(x+2)} = \frac{-1}{x+2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$$

5