1. I колоквијум из Математике 1 1.

29.11.2014.

презиме и име студента **број индекса**

1. (*5 поена*) Нека је $\mathcal{K} = \{(x, 2y) \mid x, y \in \mathbb{R},\ x^2 \neq 10y^2\}$ и $\star$ бинарна операција дефинисана као:

$$(x, 2y) \star (a, 2b) = (xa + 10by, 2xb + 2ya),$$

за све $(x, 2y), (a, 2b) \in \mathcal{K}$. Испитати да ли је $(\mathcal{K}, \star)$ група. Да ли је дата операција комутативна?

2. (*5 поена*) Одредити сопствене вредности и њима одговарајуће сопствене векторе матрице

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}.$$

3. (*5 поена*) У зависности од вредности реалних параметара a и b дискутовати и решити систем једначина

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & - & 2z & & & = & -3 \\ x & - & 2y & - & az & + & bu & = & b+1 \\ 2x & - & y & - & (2a+1)z & + & bu & = & -3b-1. \end{array}$$

4. (*5 поена*) Дате су раван α, праве p и q и тачка T:

$$\alpha\colon x + y - z + 1 = 0, \qquad p\colon \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{3}, \qquad q\colon \begin{cases} x + y + z - 1 = 0 \\ -x + y + 3z + 1 = 0 \end{cases} \qquad T(1, 1, -1).$$

а) Одредити јендачину равни β која је паралелна правама p и q и садржи тачку T.

б) Одредити нормалну пројекцију праве p на раван α.

2. I колоквијум из Математике 1 2.

29.11.2014.

презиме и име студента **број индекса**

1. (*5 поена*) Нека је $\mathcal{D} = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{R},\ a^2+b^2 \neq 0\}$ и $*$ бинарна операција дефинисана као:

$$(a,b) * (c,d) = (ac - 5bd, ad + bc),$$

за све $(a,b),(c,d) \in \mathcal{D}$. Испитати да ли је $(\mathcal{D}, *)$ група. Да ли је дата операција комутативна?

2. (*5 поена*) Решити матричну једначину

$$\left(\frac{1}{3}X + A^T B\right)^{-1} = C,$$

при чему је $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ и $C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

3. (*5 поена*) У зависности од вредности реалних параметара a и b дискутовати и решити систем линеарних једначина

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & 3y & - & z & + & 3u & = & 1 \\ 2x & + & (a-1)y & + & 5z & + & 6u & = & 5 \\ 3x & + & 6y & + & 4z & + & (2a+1)u & = & b^2+2. \end{array}$$

4. (*5 поена*) Дата су 4 вектора у векторском простору $V = (\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, \cdot)$:

$$\vec{a} = (2,-2,5), \qquad \vec{b} = (4,-3,4), \qquad \vec{c} = (2,-5,6), \qquad \vec{d} = (8,-7,14).$$

а) Испитати да ли вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ чине базу векторског простора V.

б) Уколико вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ чине базу векторског простора V, изразити вектор $\vec{d}$ као њихову линеарну комбинацију. У супротном, изразити вектор $\vec{a}$ као линеарну комбинацију вектора $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

I колоквијум из Математике 1

3.

29.11.2014.

презиме и име студента **број индекса**

1. (*5 поена*) Нека је $\mathcal{A} = \{(5x, y) \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$ и $\star$ бинарна операција дефинисана као:

$$(5x, y) \star (5a, b) = (5xb + 5ya, 10xa + yb),$$

за све $(5x, y), (5a, b) \in \mathcal{A}$. Испитати да ли је $(\mathcal{A}, \star)$ група. Да ли је дата операција комутативна?

2. (*5 поена*) У зависности од вредности реалних параметара p и q одредити ранг матрице

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 8 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & p+16 & 8 \\ pq-19 & 3 & -5 & -p-40 & p-19 \end{bmatrix}$$

3. (*5 поена*) У зависности од вредности реалног параметра a дискутовати и решити систем линеарних једначина

$$\begin{array}{rcrcrcl} 4x & + & 3y & + & z & = & 3 \\ 2x & + & ay & + & z & = & 3 \\ 2ax & + & 3y & + & z & = & a+1. \end{array}$$

4. (*5 поена*) Дате су раван β, праве p и q и тачка T:

$$\beta\colon x + y - z + 3 = 0, \qquad p\colon \frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-1}{3}, \qquad q\colon \begin{cases} x - y - 3z - 1 = 0 \\ x + 3y + 5z - 1 = 0 \end{cases} \qquad T(1, 2, 4).$$

а) Одредити једначину равни α која је нормална на праву q и садржи тачку T.

б) Одредити нормалну пројекцију праве p на раван β.

I колоквијум из Математике 1

29.11.2014.

презиме и име студента **број индекса**

1. (*5 поена*) Нека је $\mathcal{J} = \{(p,q) \mid p,q \in \mathbb{R},\ p^2+q^2 \neq 0\}$ и $*$ бинарна операција дефинисана као:

$$(p,q) * (r,s) = (pr - 8qs, rq + ps),$$

за све $(p,q),(r,s) \in \mathcal{J}$. Испитати да ли је $(\mathcal{J}, *)$ група. Да ли је дата операција комутативна?

2. (*5 поена*) Решити матричну једначину

$$(AX^{-1})^{-1} = 8B^{-1} + C,$$

при чему је $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ и $C = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$.

3. (*5 поена*) У зависности од вредности реалног параметра a дискутовати и решити систем линеарних једначина

$$\begin{aligned} ax - ay + z &= -a \\ x + ay - z &= a \\ (a+1)x + y - az &= 2. \end{aligned}$$

4. (*5 поена*) Дата су 4 вектора у векторском простору $V = (\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, \cdot)$:

$$\vec{a} = (1,1,2), \qquad \vec{b} = (4,-3,1), \qquad \vec{c} = (8,-5,6), \qquad \vec{d} = (8,-13,-5).$$

а) Испитати да ли вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ чине базу векторског простора V.

б) Уколико вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ чине базу векторског простора V, изразити вектор $\vec{d}$ као њихову линеарну комбинацију. У супротном, изразити вектор $\vec{a}$ као линеарну комбинацију вектора $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

5. I колоквијум из Математике 1 5.

29.11.2014.

презиме и име студента — број индекса

1. (*5 поена*) Нека је $\mathcal{M} = \{(x, 5y) \mid x, y \in \mathbb{R},\ x^2 - 40y^2 \neq 0\}$ и $\star$ бинарна операција дефинисана као:

$$(x, 5y) \star (a, 5b) = (ax + 40yb, 5xb + 5ya),$$

за све $(x, 5y), (a, 5b) \in \mathcal{M}$. Испитати да ли је $(\mathcal{M}, \star)$ група. Да ли је дата операција комутативна?

2. (*5 поена*) Одредити сопствене вредности и њима одговарајуће сопствене векторе матрице

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

3. (*5 поена*) У зависности од вредности реалних параметара a и b дискутовати и решити систем линеарних једначина

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & z & = & 1 \\ -x & + & 2y & - & 2z & = & 3 \\ 4x & + & y & + & z & = & b \\ x & + & 4y & - & az & = & 5. \end{array}$$

4. (*5 поена*) Дате су раван α, праве p и q и тачка T:

$$\alpha\colon x - y + z + 1 = 0, \qquad p\colon \frac{x-2}{0} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{-2}, \qquad q\colon \begin{cases} x - y + z - 2 = 0 \\ -x + y + 2z - 1 = 0 \end{cases} \qquad T(1, -3, 5).$$

а) Одредити једначину праве r којој је вектор правца нормалан на праве p и q и пролази кроз тачку T.

б) Одредити нормалну пројекцију праве p на раван α.

I колоквијум из Математике 1

6.

29.11.2014.

____ ____________

презиме и име студента **број индекса**

1. (*5 поена*) Нека је $\mathcal{S} = \{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{R},\ x^2 - 7y^2 \neq 0\}$ и $\star$ бинарна операција дефинисана као:

$$(x,y) \star (a,b) = (xa + 7yb, xb + ya),$$

за све $(x,y),(a,b) \in \mathcal{S}$. Испитати да ли је $(\mathcal{S}, \star)$ група. Да ли је дата операција комутативна?

2. (*5 поена*) У зависности од вредности реалних параметара p и q одредити ранг матрице

$$\begin{bmatrix} -3 & 3 & 2 & 1 & 5 \\ p+3 & 10 & -1 & -1 & -6 \\ -p-12 & -1 & pq+13 & 4 & q+19 \end{bmatrix}$$

3. (*5 поена*) У зависности од вредности реалног параметра a дискутовати и решити систем линеарних једначина

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & (a+1)y & + & 2(a+1)z & = & 1 \\ 2ax & + & 2y & + & (3a+1)z & = & 1 \\ 2ax & + & 2ay & + & (3a+1)z & = & a. \end{array}$$

4. (*5 поена*) Дата су 4 вектора у векторском простору $V = (\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, \cdot)$:

$$\vec{a} = (1,2,3), \qquad \vec{b} = (1,1,-2), \qquad \vec{c} = (0,2,-6), \qquad \vec{d} = (1,-1,1).$$

а) Испитати да ли вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ чине базу векторског простора V.

б) Уколико вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ чине базу векторског простора V, изразити вектор $\vec{d}$ као њихову линеарну комбинацију. У супротном, изразити вектор $\vec{a}$ као линеарну комбинацију вектора $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

7. I колоквијум из Математике 1 7.

29.11.2014.

презиме и име студента **број индекса**

1. (*5 поена*) Нека је $\mathcal{D} = \{(8x, y) \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$ и $\star$ бинарна операција дефинисана као:

$$(8x, y) \star (8a, b) = (8bx + 8ay, 40xa + yb),$$

за све $(8x, y), (8a, b) \in \mathcal{D}$. Испитати да ли је $(\mathcal{D}, \star)$ група. Да ли је дата операција комутативна?

2. (*5 поена*) Одредити сопствене вредности и њима одговарајуће сопствене векторе матрице

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. (*5 поена*) У зависности од вредности реалних параметара a и b дискутовати и решити систем линеарних једначина

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & y & + & az & = & 1 \\ 5x & + & 4y & + & (2a+1)z & = & b+1 \\ x & + & 2ay & + & z & = & 1. \end{array}$$

4. (*5 поена*) Дате су раван π, праве p и q и тачка T:

$$\pi\colon x - y + 2z + 3 = 0, \qquad p\colon \frac{x}{0} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{1}, \qquad q\colon \begin{cases} 2x - y - z - 1 = 0 \\ -4x - y + 2z + 2 = 0 \end{cases} \qquad T(-1, 2, 3).$$

а) Одредити једначину праве r којој је вектор правца нормалан на праве p и q и пролази кроз тачку T.

б) Одредити нормалну пројекцију праве p на раван π.

8. I колоквијум из Математике 1 8.

29.11.2014.

презиме и име студента **број индекса**

1. (*5 поена*) Нека је $\mathcal{D} = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{R},\ a^2 \neq 9b^2\}$ и $\star$ бинарна операција дефинисана као:

$$(a,b) \star (c,d) = (ac + 9bd, ad + bc),$$

за све $(a,b),(c,d) \in \mathcal{D}$. Испитати да ли је $(\mathcal{D},\star)$ група. Да ли је дата операција комутативна?

2. (*5 поена*) Решити матричну једначину

$$3MX^{-1} = A^T + B,$$

при чему је $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ и $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$.

3. (*5 поена*) У зависности од вредности реалних параметара α и β дискутовати и решити систем линеарних једначина

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 3x & - & 2y & + & 5z & + & \alpha w & = & 1 \\ 9x & - & 6y & + & 3z & + & 2w & = & \alpha + \beta \\ 6x & - & \alpha y & + & 4z & + & 3w & = & 4. \end{array}$$

4. (*5 поена*) Дата су 4 вектора у векторском простору $V = (\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, \cdot)$:

$$\vec{a} = (1,1,-3), \qquad \vec{b} = (1,3,-4), \qquad \vec{c} = (0,2,7), \qquad \vec{d} = (-1,-1,0).$$

а) Испитати да ли вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ чине базу векторског простора V.

б) Уколико вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ чине базу векторског простора V, изразити вектор $\vec{d}$ као њихову линеарну комбинацију. У супротном, изразити вектор $\vec{a}$ као линеарну комбинацију вектора $\vec{b}$ и $\vec{c}$.