Sistemi nelinearnih jednačina

Problem

- Rešavamo sistem oblika:

$$\left.\begin{array}{ll} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) & = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) & = 0 \\ \vdots & \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) & = 0 \end{array}\right\}$$

gde su $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ neke, u opštem slučaju, nelinearne funkcije.

Problem

- Rešavamo sistem oblika:

$$\left.\begin{array}{ll} f_1(x_1, x_2, ..., x_n) & = 0 \\ f_2(x_1, x_2, ..., x_n) & = 0 \\ \vdots & \\ f_n(x_1, x_2, ..., x_n) & = 0 \end{array}\right\}$$

  gde su $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ neke, u opštem slučaju, nelinearne funkcije.
- Sistem se može zapisati i u obliku $F(x) = 0$, gde je $x = (x_1, ..., x_n)^T$ i $F = (f_1, ..., f_n)^T$. Funkcija $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ se naziva *vektorskom funkcijom*.

- Ako je funkcija $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ neprekidno diferencijabilna, tada možemo koristiti sledeću ocenu

$$\begin{aligned} f(x+\Delta x) &= f(x_1+\Delta x_1, \dots, x_n+\Delta x_n) \\ &\approx f(x_1, \dots, x_n) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\Delta x_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\Delta x_n \\ &= f(x) + \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \vdots \\ \Delta x_n \end{bmatrix} \\ &= f(x) + \nabla f^T \cdot \Delta x, \end{aligned}$$

kad $\|\Delta x\| = \|(\Delta x_1, \dots, \Delta x_n)\| \to 0.$

- Ukoliko prethodno važi za svaku od funkcija $f_1, ..., f_n$, tada imamo da važi:

$$F(x+\Delta x) = \begin{bmatrix} f_1(x_1+\Delta x_1, ..., x_n+\Delta x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1+\Delta x_1, ..., x_n+\Delta x_n) \end{bmatrix}$$

$$\approx \begin{bmatrix} f_1(x_1, ..., x_n) + \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(x)\Delta x_1 + & ... & + \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(x)\Delta x_n \\ \vdots & \vdots & \\ f_n(x_1, ..., x_n) + \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1}(x)\Delta x_1 + & ... & + \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n}(x)\Delta x_n \end{bmatrix}$$

$$
= \begin{bmatrix} f_1(x_1, ..., x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, ..., x_n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & ... & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ & \vdots & \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) & ... & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n}(x) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \vdots \\ \Delta x_n \end{bmatrix}
$$

$$
= F(x) + J_F(x)\Delta x.
$$

$$= \begin{bmatrix} f_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, \ldots, x_n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ & \vdots & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) & \ldots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \vdots \\ \Delta x_n \end{bmatrix}$$

$$= F(x) + J_F(x)\Delta x.$$

- Matrica $J_F = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) & \ldots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x) \end{bmatrix}$ se naziva *Jakobijevom* matricom preslikavanja F u tački x, i igra ulogu prvog izvoda iz jednodimenzionog slučaja.

- Paralela između jednodimenzionog i višedimenzionog slučaja:
  1. $f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$, kad $|\Delta x| \to 0$.
  2. $F(x+\Delta x) \approx F(x) + J_F(x)\Delta x$, kad $\|\Delta x\| \to 0$.

- Paralela između jednodimenzionog i višedimenzionog slučaja:
  1. $f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$, kad $|\Delta x| \to 0$.
  2. $F(x+\Delta x) \approx F(x) + J_F(x)\Delta x$, kad $\|\Delta x\| \to 0$.
- Metode za rešavanje sistema nelinearnih jednačina imaju svoje analogone u jednodimenzionom slučaju.

- Paralela između jednodimenzionog i višedimenzionog slučaja:
  1. $f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$, kad $|\Delta x| \to 0$.
  2. $F(x + \Delta x) \approx F(x) + J_F(x)\Delta x$, kad $\|\Delta x\| \to 0$.
- Metode za rešavanje sistema nelinearnih jednačina imaju svoje analogone u jednodimenzionom slučaju.
- Bavićemo se dvema metodama:
  1. Metoda iteracije
  2. Metoda Njutn-Kantoroviča

Metoda iteracije

- Transformišemo početni sistem u ekvivalentan sistem na oblasti D koja sadrži rešenje:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= g_1(x_1, \ldots, x_n) \\ &\vdots \\ x_n &= g_n(x_1, \ldots, x_n) \end{aligned}\right\},$$

  tj. u oblik $x = G(x)$.

Metoda iteracije

- Transformišemo početni sistem u ekvivalentan sistem na oblasti D koja sadrži rešenje:

$$\left.\begin{array}{ll} x_1 & = g_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots & \\ x_n & = g_n(x_1, \ldots, x_n) \end{array}\right\},$$

tj. u oblik $x = G(x)$.

- Formiramo iterativni proces $x^{(k+1)} = G(x^{(k)})$, $k = 0, 1, \ldots,$ gde je $x^{(0)}$ neko početno rešenje iz oblasti D.
- Uslov konvergencije: $\max\limits_{x \in D} \|J_G(x)\| \leq q < 1$.

Metoda iteracije

- Transformišemo početni sistem u ekvivalentan sistem na oblasti D koja sadrži rešenje:
$$\left.\begin{array}{ll} x_1 & = g_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots & \\ x_n & = g_n(x_1, \ldots, x_n) \end{array}\right\},$$
tj. u oblik $x = G(x)$.
- Formiramo iterativni proces $x^{(k+1)} = G(x^{(k)})$, $k = 0, 1, \ldots$, gde je $x^{(0)}$ neko početno rešenje iz oblasti D.
- Uslov konvergencije: $\max\limits_{x \in D} \|J_G(x)\| \leq q < 1$.
- Ocene greške: $\left\|x^{(k)} - x\right\| \leq \dfrac{q^k}{1-q} \left\|x^{(1)} - x^{(0)}\right\|$,
$$\left\|x^{(k)} - x\right\| \leq \frac{q}{1-q} \left\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right\|$$

Metoda Njutn-Kantoroviča

- Metoda je analogna Njutnovoj metodi u jednodimenzionom slučaju.

Metoda Njutn-Kantoroviča

- Metoda je analogna Njutnovoj metodi u jednodimenzionom slučaju.
- Podsećanje: $x^{(n+1)} = x^{(n)} - \dfrac{f(x^{(n)})}{f'(x^{(n)})}$.

Metoda Njutn-Kantoroviča

- Metoda je analogna Njutnovoj metodi u jednodimenzionom slučaju.
- Podsećanje: $x^{(n+1)} = x^{(n)} - \dfrac{f(x^{(n)})}{f'(x^{(n)})}$.
- Metoda Njutn-Kantoroviča: $x^{(n+1)} = x^{(x)} - J_F^{-1}(x^{(n)})F(x^{(n)})$, za neko početno rešenje $x^{(0)}$ iz oblasti D.

Metoda Njutn-Kantorovića

- Metoda je analogna Njutnovoj metodi u jednodimenzionom slučaju.
- Podsećanje: $x^{(n+1)} = x^{(n)} - \dfrac{f(x^{(n)})}{f'(x^{(n)})}$.
- Metoda Njutn-Kantorovića: $x^{(n+1)} = x^{(x)} - J_F^{-1}(x^{(n)})F(x^{(n)})$, za neko početno rešenje $x^{(0)}$ iz oblasti D.
- Koristi se i $x^{(n+1)} = x^{(x)} - J_F^{-1}(x^{(0)})F(x^{(n)})$.

Metoda Njutn-Kantoroviča

- Metoda je analogna Njutnovoj metodi u jednodimenzionom slučaju.
- Podsećanje: $x^{(n+1)} = x^{(n)} - \dfrac{f(x^{(n)})}{f'(x^{(n)})}$.
- Metoda Njutn-Kantoroviča: $x^{(n+1)} = x^{(x)} - J_F^{-1}(x^{(n)})F(x^{(n)})$, za neko početno rešenje $x^{(0)}$ iz oblasti D.
- Koristi se i $x^{(n+1)} = x^{(x)} - J_F^{-1}(x^{(0)})F(x^{(n)})$.
- Kriterijum zaustavljanja: $\left\| x^{(k+1)} - x^{(k)} \right\| < \epsilon$