Polinomska interpolacija

Aproksimacija

- Često se u praksi javlja potreba da se umesto neke funkcije f koristi neka njoj bliska funkcija g.

Aproksimacija

- Često se u praksi javlja potreba da se umesto neke funkcije f koristi neka njoj bliska funkcija g. Na primer, može se desiti da je funkcija previše komplikovana za neku upotrebu ili da nema neka zgodna matematička svojstva, poput diferencijabilnosti ili konveksnosti.

Aproksimacija

- Često se u praksi javlja potreba da se umesto neke funkcije f koristi neka njoj bliska funkcija g. Na primer, može se desiti da je funkcija previše komplikovana za neku upotrebu ili da nema neka zgodna matematička svojstva, poput diferencijabilnosti ili konveksnosti. Takođe, čest je problem da su nam samo poznate vrednosti funkcije na konačnom skupu tačaka.
- Kriterijumi kvaliteta aproksimacije mogu biti različiti, i zavise od konkretnog slučaja. Uobičajene su ideje da se ili minimizuje različitost funkcije i njene aproksimacije na celom intervalu definisanosti, ili na nekom njegovom podskupu.

Aproksimacija

- Često se u praksi javlja potreba da se umesto neke funkcije f koristi neka njoj bliska funkcija g. Na primer, može se desiti da je funkcija previše komplikovana za neku upotrebu ili da nema neka zgodna matematička svojstva, poput diferencijabilnosti ili konveksnosti.Takođe, čest je problem da su nam samo poznate vrednosti funkcije na konačnom skupu tačaka.
- Kriterijumi kvaliteta aproksimacije mogu biti različiti, i zavise od konkretnog slučaja. Uobičajene su ideje da se ili minimizuje različitost funkcije i njene aproksimacije na celom intervalu definisanosti, ili na nekom njegovom podskupu.
- Prirodna je ideja aproksimacije funkcije polinomom (primer - Tejlorov polinom).

Problem

Razmotrimo primer broja stanovnika Beograda kroz godine:

1953	1961	1971	1981	1991	2002	2011
477982	657362	899094	1087915	1133146	1119642	1233796

Problem

Razmotrimo primer broja stanovnika Beograda kroz godine:

1953	1961	1971	1981	1991	2002	2011
477982	657362	899094	1087915	1133146	1119642	1233796

Potrebno je proceniti broj stanovnika 1994. godine.

Problem

Razmotrimo primer broja stanovnika Beograda kroz godine:

1953	1961	1971	1981	1991	2002	2011
477982	657362	899094	1087915	1133146	1119642	1233796

Potrebno je proceniti broj stanovnika 1994. godine.

- Funkcija broja stanovnika u zavisnosti od godine ima poznate vrednosti u konačno mnogo tačaka (zadata je tabelarno).

Problem

Razmotrimo primer broja stanovnika Beograda kroz godine:

1953	1961	1971	1981	1991	2002	2011
477982	657362	899094	1087915	1133146	1119642	1233796

Potrebno je proceniti broj stanovnika 1994. godine.

- Funkcija broja stanovnika u zavisnosti od godine ima poznate vrednosti u konačno mnogo tačaka (zadata je tabelarno).
- Funkciju ćemo aproksimirati polinomom.

Problem

Razmotrimo primer broja stanovnika Beograda kroz godine:

1953	1961	1971	1981	1991	2002	2011
477982	657362	899094	1087915	1133146	1119642	1233796

Potrebno je proceniti broj stanovnika 1994. godine.

- Funkcija broja stanovnika u zavisnosti od godine ima poznate vrednosti u konačno mnogo tačaka (zadata je tabelarno).
- Funkciju ćemo aproksimirati polinomom.
- Smatraćemo da je aproksimacija kvalitetna ako se vrednosti polinoma poklapaju sa vrednošću funkcije u datim tačkama (godinama).

Teorema: Neka su poznate vrednosti $(x_i, f(x_i))$, $i = 0, 1, ..., n$. Tada postoji tačno jedan polinom stepena ne većeg od n, $P_n(x)$, za koji važi $P_n(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, ..., n$.

Teorema: Neka su poznate vrednosti $(x_i, f(x_i))$, $i = 0, 1, ..., n$. Tada postoji tačno jedan polinom stepena ne većeg od n, $P_n(x)$, za koji važi $P_n(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, ..., n$.

Vrednosti x_i nazivamo čvorovima interpolacije, a polinom $P_n(x)$ interpolacionim polinomom funkcije f.

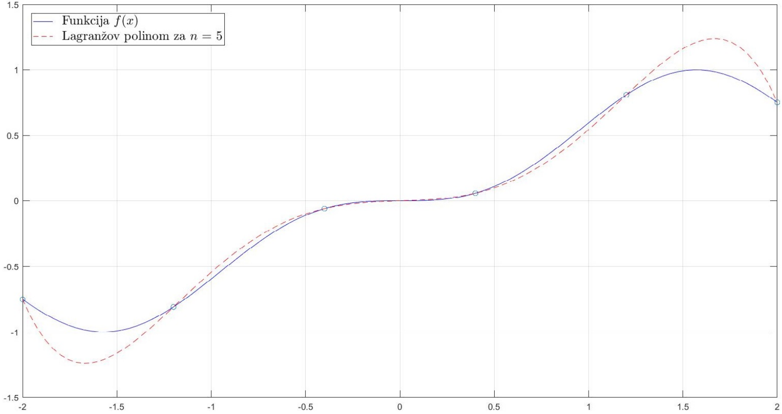
Teorema: Neka su poznate vrednosti $(x_i, f(x_i))$, $i = 0, 1, ..., n$. Tada postoji tačno jedan polinom stepena ne većeg od n, $P_n(x)$, za koji važi $P_n(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, ..., n$.

Vrednosti x_i nazivamo čvorovima interpolacije, a polinom $P_n(x)$ interpolacionim polinomom funkcije f.

Za grešku interpolacije, $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$, važi ocena:

$$|R_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)|,$$

gde je $M_{n+1} = \max_{a \leq x \leq b} |f^{(n+1)}(x)|$.


Funkcija $f(x)$
Lagranžov polinom za $n = 5$
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2

Lagranžov interpolacioni polinom

Jedinstveni interpolacioni polinom funkcije f se može zapisati kao

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j} f(x_k)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(x - x_0)\cdots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\cdots(x - x_n)}{(x_k - x_0)\cdots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\cdots(x_k - x_n)} f(x_k)$$

i u tom obliku se naziva *Lagranžov interpolacioni polinom*.

Lagranžov interpolacioni polinom

Jedinstveni interpolacioni polinom funkcije f se može zapisati kao

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j} f(x_k)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(x - x_0) \cdots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_k - x_0) \cdots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \cdots (x_k - x_n)} f(x_k)$$

i u tom obliku se naziva *Lagranžov interpolacioni polinom*. Interpolacinim polinomom koji formiramo iz podataka o broju stanovnika u Beogradu možemo proceniti da je u Beogradu bilo 1126212 stanovnika 1994. godine.

Podeljene razlike

Definišemo podeljene razlike na sledeći način:

- $f[x_i, x_{i+1}] = \dfrac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$ - prvog reda u čvoru x_i.

Podeljene razlike

Definišemo podeljene razlike na sledeći način:

- $f[x_i, x_{i+1}] = \dfrac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$ - prvog reda u čvoru x_i.
- $f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \dfrac{f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i}$ - drugog reda u čvoru x_i.

Podeljene razlike

Definišemo podeljene razlike na sledeći način:

- $f[x_i, x_{i+1}] = \dfrac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$ - prvog reda u čvoru x_i.
- $f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \dfrac{f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i}$ - drugog reda u čvoru x_i.
- $\ldots$

Podeljene razlike

Definišemo podeljene razlike na sledeći način:

- $f[x_i, x_{i+1}] = \dfrac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$ - prvog reda u čvoru x_i.
- $f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \dfrac{f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i}$ - drugog reda u čvoru x_i.
- $\cdots$
- $f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}] = \dfrac{f[x_{i+1}, \ldots, f_{i+k}] - f[x_i, \ldots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}$ - k-tog reda u čvoru x_i.

Podeljene razlike se najčešće predstavljaju tabelarno:

x_0 x_1 x_2 $\vdots$ x_n	$f(x_0)$ $f(x_1)$ $f(x_2)$ $\vdots$ $f(x_n)$	$f[x_0, x_1]$ $f[x_1, x_2]$ $\vdots$ $f[x_{n-1}, x_n]$	$f[x_0, x_1, x_2]$ $\vdots$ $f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$	$\cdots$	$f[x_0, x_1, ..., x_n]$

Podeljene razlike se najčešće predstavljaju tabelarno:

x_0 x_1 x_2 $\vdots$ x_n	$f(x_0)$ $f(x_1)$ $f(x_2)$ $\vdots$ $f(x_n)$	$f[x_0, x_1]$ $f[x_1, x_2]$ $\vdots$ $f[x_{n-1}, x_n]$	$f[x_0, x_1, x_2]$ $\vdots$ $f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$	$\cdots$	$f[x_0, x_1, ..., x_n]$

Podeljene razlike se obično definišu za neekvidistantne čvorove.

Koristeći vrednosti prvih elemenata svake kolone u tabeli, sem prve

x_0 x_1 x_2 $\vdots$ x_n	$f(x_0)$ $f(x_1)$ $f(x_2)$ $\vdots$ $f(x_n)$	$f[x_0, x_1]$ $f[x_1, x_2]$ $\vdots$ $f[x_{n-1}, x_n]$	$f[x_0, x_1, x_2]$ $\vdots$ $f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$	$\cdots$	$f[x_0, x_1, ..., x_n]$

Koristeći vrednosti prvih elemenata svake kolone u tabeli, sem prve

x_0 x_1 x_2 $\vdots$ x_n	$f(x_0)$ $f(x_1)$ $f(x_2)$ $\vdots$ $f(x_n)$	$f[x_0, x_1]$ $f[x_1, x_2]$ $\vdots$ $f[x_{n-1}, x_n]$	$f[x_0, x_1, x_2]$ $\vdots$ $f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$	$\cdots$	$f[x_0, x_1, \ldots, x_n]$

interpolacioni polinom se može zapisati u obliku:

$$P_n(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \\ \cdots + f[x_0, x_1, \ldots, x_n](x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}),$$

i tada ga zovemo *Njutnovim* interpolacionim polinomom za neekvidistantne čvorove.

Konačne razlike

- Neka su poznati čvorovi interpolacije i vrednosti $y_i = f(x_i)$, $i = 0, 1, ..., n$.
- U slučaju kada su čvorovi interpolacije ekvidistantni, tj. važi $x_{i+1} - x_i = h = const$ odnosno $x_i = x_0 + ih$, tada se umesto podeljenih koriste *konačne razlike:*
    - $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$ - prvog reda za čvor x_i.

Konačne razlike

- Neka su poznati čvorovi interpolacije i vrednosti $y_i = f(x_i)$, $i = 0, 1, ..., n$.
- U slučaju kada su čvorovi interpolacije ekvidistantni, tj. važi $x_{i+1} - x_i = h = const$ odnosno $x_i = x_0 + ih$, tada se umesto podeljenih koriste *konačne razlike:*
  - $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$ - prvog reda za čvor x_i.
  - $\Delta^2 y_i = \Delta(\Delta y_i) = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i$ - drugog reda za čvor x_i.

Konačne razlike

- Neka su poznati čvorovi interpolacije i vrednosti $y_i = f(x_i)$, $i = 0, 1, ..., n$.
- U slučaju kada su čvorovi interpolacije ekvidistantni, tj. važi $x_{i+1} - x_i = h = const$ odnosno $x_i = x_0 + ih$, tada se umesto podeljenih koriste *konačne razlike:*
  - $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$ - prvog reda za čvor x_i.
  - $\Delta^2 y_i = \Delta(\Delta y_i) = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i$ - drugog reda za čvor x_i.
  - ...
  - $\Delta^k y_i = \Delta(\Delta^{k-1} y_i) = \Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i$ - k-tog reda za čvor x_i.

Konačne razlike

- Neka su poznati čvorovi interpolacije i vrednosti $y_i = f(x_i)$, $i = 0, 1, ..., n$.
- U slučaju kada su čvorovi interpolacije ekvidistantni, tj. važi $x_{i+1} - x_i = h = const$ odnosno $x_i = x_0 + ih$, tada se umesto podeljenih koriste *konačne razlike:*
  - $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$ - prvog reda za čvor x_i.
  - $\Delta^2 y_i = \Delta(\Delta y_i) = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i$ - drugog reda za čvor x_i.
  - ...
  - $\Delta^k y_i = \Delta(\Delta^{k-1} y_i) = \Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i$ - k-tog reda za čvor x_i.
- Veza između podeljenih i konačnih razlika:

$$f[x_i, ..., x_{i+k}] = \frac{\Delta^k y_i}{k! h^k}$$

.

Konačne razlike se takođe obično predstavljaju tabelom:

i	x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$		$\Delta^n y_i$
0	x_0	y_0	Δy_0			
1	x_1	y_1	Δy_1	$\Delta^2 y_0$		
2	x_2	y_2	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\Delta^n y_0$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	Δy_{n-1}	$\Delta^2 y_{n-2}$		
n	x_n	y_n				

I Njutnov interpolacioni polinom za ekvidistantne čvorove

Ako uvedemo $s = \dfrac{x - x_0}{h}$, tada se interpolacioni polinom može zapisati kao

$$y_0 + \Delta y_0 s + \frac{\Delta^2 y_0}{2!} s(s-1) + \cdots + \frac{\Delta^n y_0}{n!} s(s-1)\cdots(s-n+1).$$

I Njutnov interpolacioni polinom za ekvidistantne čvorove

Ako uvedemo $s = \dfrac{x - x_0}{h}$, tada se interpolacioni polinom može zapisati kao

$$y_0 + \Delta y_0 s + \frac{\Delta^2 y_0}{2!} s(s-1) + \cdots + \frac{\Delta^n y_0}{n!} s(s-1)\cdots(s-n+1).$$

- Koristi se kad je x blizu početka intervala interpolacije.

I Njutnov interpolacioni polinom za ekvidistantne čvorove

Ako uvedemo $s = \dfrac{x - x_0}{h}$, tada se interpolacioni polinom može zapisati kao

$$y_0 + \Delta y_0 s + \frac{\Delta^2 y_0}{2!} s(s-1) + \cdots + \frac{\Delta^n y_0}{n!} s(s-1)\cdots(s-n+1).$$

- Koristi se kad je x blizu početka intervala interpolacije.
- Za grešku interpolacije važi ocena:

$$|R_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |h^{n+1} s(s-1)\cdots(s-n)|.$$

I Njutnov interpolacioni polinom za ekvidistantne čvorove

Ako uvedemo $s = \dfrac{x - x_0}{h}$, tada se interpolacioni polinom može zapisati kao

$$y_0 + \Delta y_0 s + \frac{\Delta^2 y_0}{2!} s(s-1) + \cdots + \frac{\Delta^n y_0}{n!} s(s-1)\cdots(s-n+1).$$

- Koristi se kad je x blizu početka intervala interpolacije.
- Za grešku interpolacije važi ocena:

$$|R_n(x)| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |h^{n+1} s(s-1)\cdots(s-n)|.$$

- Koristi se i aproksimativna greška:

$$|R_k(x)| \approx \frac{\max_i |\Delta^{k+1} y_i|}{(k+1)!} |s(s-1)\cdots(s-k)|.$$

II Njutnov interpolacioni polinom za ekvidistantne čvorove

Ako uvedemo $s = \dfrac{x - x_n}{h}$, tada se interpolacioni polinom može zapisati kao

$$y_n + \Delta y_{n-1} s + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!} s(s+1) + \cdots + \frac{\Delta^n y_0}{n!} s(s+1)\cdots(s+n-1).$$

II Njutnov interpolacioni polinom za ekvidistantne čvorove

Ako uvedemo $s = \dfrac{x - x_n}{h}$, tada se interpolacioni polinom može zapisati kao

$$y_n + \Delta y_{n-1} s + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!} s(s+1) + \cdots + \frac{\Delta^n y_0}{n!} s(s+1)\cdots(s+n-1).$$

- Koristi se kad je x blizu kraja intervala interpolacije.

II Njutnov interpolacioni polinom za ekvidistantne čvorove

Ako uvedemo $s = \dfrac{x - x_n}{h}$, tada se interpolacioni polinom može zapisati kao

$$y_n + \Delta y_{n-1} s + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!} s(s+1) + \cdots + \frac{\Delta^n y_0}{n!} s(s+1)\cdots(s+n-1).$$

- Koristi se kad je x blizu kraja intervala interpolacije.
- Aproksimativna greška:

$$|R_k(x)| \approx \frac{\max_i |\Delta^{k+1} y_i|}{(k+1)!} |s(s+1)\cdots(s+k)|.$$

I Njutnov polinom:

i	x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$		$\Delta^n y_i$
0	x_0	y_0	Δy_0	$\Delta^2 y_0$		
1	x_1	y_1	Δy_1			
2	x_2	y_2		$\vdots$	$\dots$	$\Delta^n y_0$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\Delta^2 y_{n-2}$		
n	x_n	y_n	Δy_{n-1}			

II Njutnov polinom:

i	x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$		$\Delta^n y_i$
0	x_0	y_0	Δy_0	$\Delta^2 y_0$		
1	x_1	y_1	Δy_1			
2	x_2	y_2		$\vdots$	$\dots$	$\Delta^n y_0$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\Delta^2 y_{n-2}$		
n	x_n	y_n	Δy_{n-1}			

Inverzna interpolacija

- Pretpostavimo da je tabelarno zadata strogo monotona funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$:

x_0	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$\cdots$	$f(x_n)$

Inverzna interpolacija

- Pretpostavimo da je tabelarno zadata strogo monotona funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$:

x_0	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$\cdots$	$f(x_n)$

- Zadatak nam je da odredimo za koju vrednost x će važiti $f(x) = y$, gde je y unapred zadat broj.

Inverzna interpolacija

- Pretpostavimo da je tabelarno zadata strogo monotona funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$:

x_0	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$\cdots$	$f(x_n)$

- Zadatak nam je da odredimo za koju vrednost x će važiti $f(x) = y$, gde je y unapred zadat broj.
- Neka je $y_i = f(x_i)$.

Inverzna interpolacija

- Pretpostavimo da je tabelarno zadata strogo monotona funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$:

x_0	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$\cdots$	$f(x_n)$

- Zadatak nam je da odredimo za koju vrednost x će važiti $f(x) = y$, gde je y unapred zadat broj.
- Neka je $y_i = f(x_i)$.
- Pošto je f strogo monotona, ona je i inverzibilna, pa postoji f^{-1} i važi $x_i = f^{-1}(y_i)$, $i = 0, 1, ..., n$.

Inverzna interpolacija

- Pretpostavimo da je tabelarno zadata strogo monotona funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$:

x_0	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$\cdots$	$f(x_n)$

- Zadatak nam je da odredimo za koju vrednost x će važiti $f(x) = y$, gde je y unapred zadat broj.
- Neka je $y_i = f(x_i)$.
- Pošto je f strogo monotona, ona je i inverzibilna, pa postoji f^{-1} i važi $x_i = f^{-1}(y_i)$, $i = 0, 1, ..., n$.
- Zadatak nam postaje da odredimo (približno) vrednost $f^{-1}(y)$. U tu svrhu ćemo koristiti klasičan interpolacioni polinom, samo za funkciju f^{-1}.