Numerička integracija

- Potrebno je približno izračunati integral $I(f) = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

- Potrebno je približno izračunati integral $I(f) = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
- Problem se može rešavati određivanjem funkcije g, td. $I(f) \approx I(g)$.

- Potrebno je približno izračunati integral $I(f) = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
- Problem se može rešavati određivanjem funkcije g, td. $I(f) \approx I(g)$.
- Prirodna je ideja da se za g uzme interpolacioni polinom funkcije f na $[a, b]$. Ako je $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$, tada je:

$$I(f) \approx I(P_n) = \int\limits_a^b P_n(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b \sum_{i=0}^{n} l_i(x) f(x_i)\,\mathrm{d}x$$
$$= \sum_{i=0}^{n} \left(\int\limits_a^b l_i(x)\,\mathrm{d}x \right) f(x_i),$$

gde su x_i čvorovi interpolacije i $l_i(x) = \prod\limits_{0 \le j \ne i \le n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$.

Kvadraturne formule

- Formule oblika $I(f) \approx \sum_{i=0}^{n} A_i(x) f(x_i)$ zovemo **kvadraturnim formulama**.

Kvadraturne formule

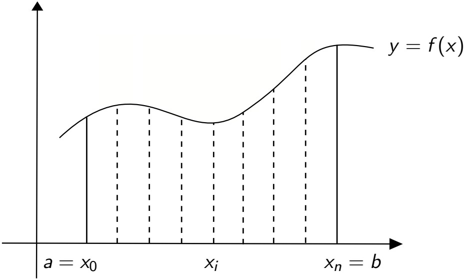
- Formule oblika $I(f) \approx \sum_{i=0}^{n} A_i(x) f(x_i)$ zovemo **kvadraturnim formulama**.
- $E_n(f) = I(f) - \sum_{i=0}^{n} A_i(x) f(x_i)$ je *greška kvadraturne formule* za funkciju f. Ukoliko je $E_n(f) = 0$, tada kažemo da je kvadraturna formula *tačna* za funkciju f.

Kvadraturne formule

- Formule oblika $I(f) \approx \sum_{i=0}^{n} A_i(x) f(x_i)$ zovemo **kvadraturnim formulama**.
- $E_n(f) = I(f) - \sum_{i=0}^{n} A_i(x) f(x_i)$ je *greška kvadraturne formule* za funkciju f. Ukoliko je $E_n(f) = 0$, tada kažemo da je kvadraturna formula *tačna* za funkciju f.
- Ukoliko je m najveći broj td. je kvadraturna formula tačna za svako x^k, $k \leq m$ ($E_n(x^k) = 0$, $k \leq m$, $E_n(x^{m+1}) \neq 0$), tada za broj m kažemo da je *algebarski stepen tačnosti* te kvadraturne formule.

Kvadraturne formule

- Formule oblika $I(f) \approx \sum_{i=0}^{n} A_i(x) f(x_i)$ zovemo **kvadraturnim formulama**.
- $E_n(f) = I(f) - \sum_{i=0}^{n} A_i(x) f(x_i)$ je *greška kvadraturne formule* za funkciju f. Ukoliko je $E_n(f) = 0$, tada kažemo da je kvadraturna formula *tačna* za funkciju f.
- Ukoliko je m najveći broj td. je kvadraturna formula tačna za svako x^k, $k \leq m$ ($E_n(x^k) = 0$, $k \leq m$, $E_n(x^{m+1}) \neq 0$), tada za broj m kažemo da je *algebarski stepen tačnosti* te kvadraturne formule.
- Kvadraturna formula je tačna za svaki polinom stepena $\leq m$ akko je m algebarski stepen tačnosti te formule.



- Pretpostavimo da imamo ravnomernu podelu intervala $[a, b]$ sa korakom h i čvorovima $x_0, x_1, ..., x_n$ - važi $h = \dfrac{b-a}{n}$. Ukoliko koristimo te čvorove da aproksimiramo funkciju f na segmentima podele interpolacionim polinomom nultog, prvog i drugog stepena, dobijamo redom kvadraturne formula **pravougaonika, trapeza** i **Simpsona**.

Formula pravougaonika

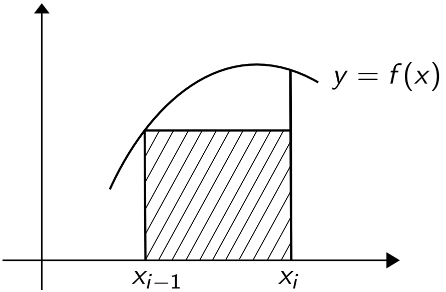
- Formula pravougaonika:
  1. (levih) $I(f) \approx h(f(x_0) + f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1}))$,
  2. (desnih) $I(f) \approx h(f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n))$.

Formula pravougaonika

- Formula pravougaonika:
  1. (levih) $I(f) \approx h(f(x_0) + f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1}))$,
  2. (desnih) $I(f) \approx h(f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n))$.

Formula pravougaonika

- Formula pravougaonika:
  1. (levih) $I(f) \approx h(f(x_0) + f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1}))$,
  2. (desnih) $I(f) \approx h(f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n))$.
- Ocena greške: $|E_h(f)| \leq \dfrac{b-a}{2} h \cdot M_1$.



Formula trapeza

- Formula trapeza:

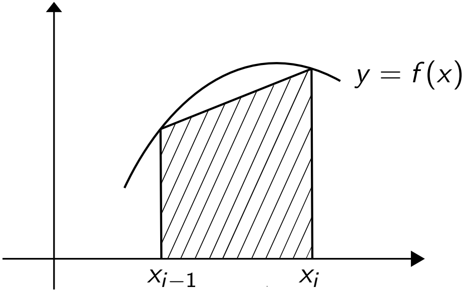
$$I(f) \approx h\left(\frac{f(x_0)+f(x_n)}{2} + f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1})\right).$$

Formula trapeza

- Formula trapeza:

$$I(f) \approx h\left(\frac{f(x_0)+f(x_n)}{2} + f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1})\right).$$

- Ocena greške: $|E_h(f)| \leq \dfrac{b-a}{12} h^2 \cdot M_2.$



Simpsonova formula

- Simpsonova formula: Koriste se po 3 susedna čvora podele, pa je broj čvorova neparan tj. broj segmenata paran $n = 2k$:

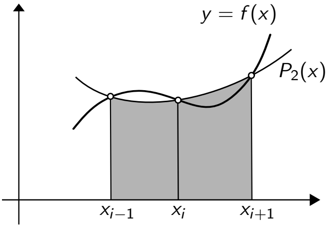
$$I(f) \approx \frac{h}{3}\left(f(x_0) + f(x_{2k}) + 4\sum_{i=1}^{k} f(x_{2i-1}) + 2\sum_{i=1}^{k-1} f(x_{2i}) \right).$$

Simpsonova formula

- Simpsonova formula: Koriste se po 3 susedna čvora podele, pa je broj čvorova neparan tj. broj segmenata paran $n = 2k$:

$$I(f) \approx \frac{h}{3}\left(f(x_0) + f(x_{2k}) + 4\sum_{i=1}^{k} f(x_{2i-1}) + 2\sum_{i=1}^{k-1} f(x_{2i})\right).$$

- Ocena greške: $|E_h(f)| \leq \dfrac{b-a}{180} h^4 \cdot M_4.$



Rungeova ocena greške

- Za ocene greške je neophodno računanje izvoda višeg reda i njihovo ocenjivanje, što je često komplikovano.

Rungeova ocena greške

- Za ocene greške je neophodno računanje izvoda višeg reda i njihovo ocenjivanje, što je često komplikovano.
- Ako je $I_h(f)$ kvadraturna formula za funkciju f, sa korakom h podele intervala $[a, b]$, a I_{2h} formula kad je korak $2h$, tada važi procena greške
$$|E_h(f)| \approx \frac{|I_h - I_{2h}|}{2^p - 1},$$
gde je $p = 1$ za formulu pravougaonika, $p = 2$ za formulu trapeza i $p = 4$ za Simpsonovu formulu. Takvu procenu nazivamo *Rungeovom ocenom greške*.