Numeričko rešavanje diferencijalnih jednačina

Košijev problem

Košijev problem

Razmatraćemo Košijev problem

$$y' = f(x, y)$$
$$y(x_0) = y_0.$$

Košijev problem

Razmatraćemo Košijev problem

$$y' = f(x, y)$$
$$y(x_0) = y_0.$$

Cilj nam je da odredimo približne vrednosti y_k tačnog rešenja $y(x)$ u istaknutim ekvidistantnim tačkama $x_k = x_0 + kh$, $k = 0, 1, \ldots$.

Košijev problem

Razmatraćemo Košijev problem

$$y' = f(x, y)$$
$$y(x_0) = y_0.$$

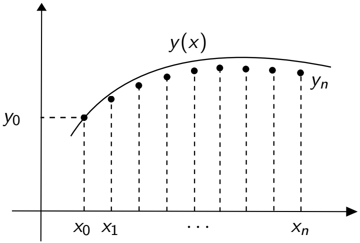
Cilj nam je da odredimo približne vrednosti y_k tačnog rešenja $y(x)$ u istaknutim ekvidistantnim tačkama $x_k = x_0 + kh$, $k = 0, 1, \ldots$. Jasno je da ćemo uzeti da je vrednost u prvom čvoru baš $y(x_0)$.

Košijev problem

Razmatraćemo Košijev problem

$$y' = f(x, y)$$
$$y(x_0) = y_0.$$

Cilj nam je da odredimo približne vrednosti y_k tačnog rešenja $y(x)$ u istaknutim ekvidistantnim tačkama $x_k = x_0 + kh$, $k = 0, 1, \ldots$. Jasno je da ćemo uzeti da je vrednost u prvom čvoru baš $y(x_0)$.



Košijev problem

Na osnovu Njutn-Lajbnicove teoreme znamo da je ispunjeno

$$\int_a^x y'(t)dt = y(x) - y(a),$$

Košijev problem

Na osnovu Njutn-Lajbnicove teoreme znamo da je ispunjeno

$$\int_a^x y'(t)dt = y(x) - y(a),$$

odakle je

$$y(a) = y(x) + \int_a^x f(t, y(t))dt.$$

Košijev problem

Na osnovu Njutn-Lajbnicove teoreme znamo da je ispunjeno

$$\int_a^x y'(t)dt = y(x) - y(a),$$

odakle je

$$y(a) = y(x) + \int_a^x f(t, y(t))dt.$$

Ako iskoristimo neku kvadraturnu formulu za aproksimaciju integrala na desnoj strani, tada možemo računati vrednost y_{k+1} na osnovu vrednosti y_k.

Košijev problem

Na osnovu Njutn-Lajbnicove teoreme znamo da je ispunjeno

$$\int_a^x y'(t)dt = y(x) - y(a),$$

odakle je

$$y(a) = y(x) + \int_a^x f(t, y(t))dt.$$

Ako iskoristimo neku kvadraturnu formulu za aproksimaciju integrala na desnoj strani, tada možemo računati vrednost y_{k+1} na osnovu vrednosti y_k. U zavisnosti od odabira kvadraturne formule imaćemo različite metode za dobijanje numeričkog rešenja datog Košijevog problema.

Ojlerova metoda i metoda Runge-Kuta reda 2

Ako iskoristimo jednostavnu metodu pravougaonika za aproksimaciju integrala tada dobijamo *Ojlerovu metodu*:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n).$$

Ojlerova metoda i metoda Runge-Kuta reda 2

Ako iskoristimo jednostavnu metodu pravougaonika za aproksimaciju integrala tada dobijamo *Ojlerovu metodu*:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n).$$

Metoda Runge-Kuta reda 2 predstavlja sledeću modifikaciju Ojlerove metode:

$$y_{n+1} = y_n + hf\left(x_k + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} f(x_n, y_n)\right), n = 0, 1, \ldots$$

Metoda Runge-Kuta reda 4

Ova metoda predstavlja nešto kompleksniju modifikaciju prethodnih, i veza između rešenja je sledeća:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}\left(K_1^{(n)} + 2K_2^{(n)} + 2K_3^{(n)} + K_4^{(n)}\right),$$

$n = 0, 1, \ldots$, gde je

$$\begin{aligned}
K_1^{(n)} &= hf\left(x_n, y_n\right), \\
K_2^{(n)} &= hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{K_1^{(n)}}{2}\right), \\
K_3^{(n)} &= hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{K_2^{(n)}}{2}\right), \\
K_4^{(n)} &= hf\left(x_n + h, y_n + K_3^{(n)}\right).
\end{aligned}$$

Rungeova ocena greške

Za sve prethodne metode je moguće odrediti aproksimaciju greške preko formule

$$|y(x_n) - y_n| \approx \frac{|y_n^* - y_n|}{2^p - 1},$$

gde su y_n i y_n^* približne vrednosti kada računamo sa koracima h i $2h$, redom, a p parametar koji zavisi od konkretne metode:

Rungeova ocena greške

Za sve prethodne metode je moguće odrediti aproksimaciju greške preko formule

$$|y(x_n) - y_n| \approx \frac{|y_n^* - y_n|}{2^p - 1},$$

gde su y_n i y_n^* približne vrednosti kada računamo sa koracima h i $2h$, redom, a p parametar koji zavisi od konkretne metode:

- p = 1: Ojlerova metoda,
- p = 2: Metoda Runge-Kuta reda 2,
- p = 4: Metoda Runge-Kuta reda 4.

Tabela uz 1. zadatak

k	x_k	y_k	$y(x_k)$
0	0.0	1.00000	1.00000
1	0.1	1.10000	1.11034
2	0.2	1.22000	1.24281
3	0.3	1.36200	1.39912
4	0.4	1.52820	1.58365
5	0.5	1.72102	1.79744
6	0.6	1.94312	2.04424
7	0.7	2.19743	2.32751
8	0.8	2.48718	2.65108
9	0.9	2.81590	3.01921
10	1.0	3.18748	3.43656

Tabela uz 2. zadatak

k	x_k	$y_k\,(OJ)$	(RK_4)	$y(x_k)$
0	0.0	0.000000	0.000000	0.000000
1	0.1	0.100000	0.127253	0.127257
2	0.2	0.251907	0.318812	0.318820
3	0.3	0.469774	0.591249	0.591261
4	0.4	0.770173	0.963959	0.963976
5	0.5	1.17260	1.45960	1.459623
6	0.6	1.69990	2.10459	2.104624
7	0.7	2.37885	2.92971	2.929745
8	0.8	3.24069	3.97071	3.970753
9	0.9	4.32185	5.26911	5.269167
10	1.0	5.66469	6.87306	6.873127

Tabela uz 3. zadatak

k	x_k	$y_k(RK2)$	$y_k(RK4)$	$y(x_k)$
0	1.0	1.00000	1.00000	1.00000
1	1.1	1.31430	1.31484	1.31484
2	1.2	1.65772	1.65878	1.65879
3	1.3	2.02949	2.03107	2.03107
4	1.4	2.42897	2.43106	2.43106
5	1.5	2.85560	2.85820	2.85820
6	1.6	3.30891	3.31200	3.31201
7	1.7	3.78848	3.79207	3.79207
8	1.8	4.29394	4.29801	4.29802
9	1.9	4.82496	4.82952	4.82952
10	2.0	5.38124	5.38629	5.38629