Математика 1
Вежбе 6

Данијел Алексић

Универзитет у Београду
Факултет организационих наука

2023.

Представити неки скуп тачака у $\mathbb{R}^3$ (раван, праву итд) једначином значи формирати једнакост облика $f(x, y, z) = 0$, при чему тачка (x, y, z) припада том скупу тачака **ако и само ако** претходна једнакост за њу важи.

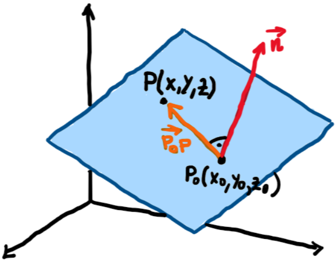
Нпр. ускоро ћемо видети да свака раван у $\mathbb{R}^3$ има једначину облика

$$ax + by + cz + d = 0,$$

где су a, b, c и d неки реални бројеви.

Једначина равни: вектор нормале и једна тачка

Знамо да је раван јединствено одређена трима својим тачкама. Ипак, овде ће бити згодно користити другу карактеризацију: Раван π је јединствено одређена једном својом тачком $P_0(x_0, y_0, z_0)$ и вектором нормале на раван, $\vec{n} = (a, b, c)$ (види слику).



Тачка $P(x, y, z)$ припада равни ако и само ако је $\overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{n} = 0$, односно

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot (a, b, c) = 0,$$

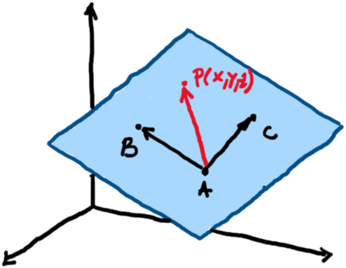
то јест

$$ax + by + cz + \underbrace{(-ax_0 - by_0 - cz_0)}_{=d} = 0.$$

$$\boxed{\pi : \ ax + by + cz + d = 0}$$

Једначина равни: три тачке

Нека су сада дате три тачке које припадају равни π: $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$ и $C(x_C, y_C, z_C)$. Тражимо једначину равни π.



Тачка $P(x, y, z)$ припада равни π ако и само ако вектори $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ леже у истој равни, односно акко је

$$[\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = 0.$$

Добијамо једначину равни која садржи тачке A, B и C:

$$\boxed{\pi : \begin{vmatrix} x - x_A & y - y_A & z - z_A \\ x_B - x_A & y_B - y_A & z_B - z_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A & z_C - z_A \end{vmatrix} = 0}$$

И ова једначина се своди на облик $ax + by + cz + d = 0$ након рачунања детерминанте.

Задатак

Написати једначину равни π која садржи тачке $A(1,1,1)$, $B(0,-1,2)$ и $C(2,3,-1)$.

Задатак се може урадити на (барем) три начина.
Први начин јесте коришћењем „готове формуле”. Раван π има једначину:

$$\pi : \begin{vmatrix} x - x_A & y - y_A & z - z_A \\ x_B - x_A & y_B - y_A & z_B - z_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A & z_C - z_A \end{vmatrix} = 0,$$

односно

$$\pi : \begin{vmatrix} x - 1 & y - 1 & z - 1 \\ 0 - 1 & -1 - 1 & 2 - 1 \\ 2 - 1 & 3 - 1 & -1 - 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Средимо:

$$\pi: \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

Развијемо по првој врсти:

$$\pi: \; (x-1)(4-2) - (y-1)(2-1) + (z-1)(-2+2) = 0,$$

$$\pi: \; 2(x-1) - (y-1) = 0,$$

па добијамо једначину равни π:

$$\boxed{\pi: \; 2x - y - 1 = 0.}$$

Други начин јесте решавањем система. Знамо да свака раван, па и наша π има једначину облика

$$\pi: \; ax + by + cz + d = 0.$$

Тачка $A(1,1,1)$ задовољава једначину равни π: $a \cdot 1 + b \cdot 1 + c \cdot 1 + d = 0$. Тачка $B(0,-1,2)$ задовољава једначину равни π: $a \cdot 0 + b \cdot (-1) + c \cdot 2 + d = 0$. Тачка $C(2,3,-1)$ задовољава једначину равни π: $a \cdot 2 + b \cdot 3 + c \cdot (-1) + d = 0$. Добијамо систем једначина:

$$\begin{aligned} a + b + c + d &= 0 \\ - b + 2c + d &= 0 \\ 2a + 3b - c + d &= 0. \end{aligned}$$

Решимо га.

$$\begin{aligned}
a + b + c + d &= 0\\
-b + 2c + d &= 0\\
2a + 3b - c + d &= 0.
\end{aligned}$$

$$------------$$

$$\begin{aligned}
a + b + c + d &= 0\\
-b + 2c + d &= 0\\
b - 3c - d &= 0 \quad III - 2I
\end{aligned}$$

$$------------$$

$$\begin{aligned}
a + b + c + d &= 0\\
-b + 2c + d &= 0\\
-c &= 0 \quad III + II
\end{aligned}$$

Добијамо $c = 0$ и остаје нам да решимо

$$\begin{aligned} a + b + d &= 0 \\ -b + d &= 0 \end{aligned},$$

што је систем са више непознатих од једначина. Узимамо $d = t$, $t \in \mathbb{R}$, као параметар. Добијамо $b = t$ и $a = -2t$. Дакле:

$$(a, b, c, d) = (-2t, t, 0, t) = -t(2, -1, 0, -1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Узимамо **било које не-нула решење**, рецимо $t = -1$. Добијамо да је једначина равни π:

$$\boxed{\pi : \ 2x - y - 1 = 0.}$$

Слбода да бирамо t заправо одговара чињеници да горња једнакост остаје тачна (и еквивалентна претходној) када се помножи било којим ненула бројем.

Овде треба застати и покушати смислити трећи начин решавања задатка, који укључује употребу векторског производа. Скица решења је на наредном слајду.

Трећи начин био би формирањем вектора нормале.

Вектори $\overrightarrow{AC} = (1, 2, -2)$ и $\overrightarrow{BC} = (2, 4, -3)$ леже у равни π, тј. оба су паралелна са π. Значи да је вектор нормале на раван π, зовимо га $\vec{n}_\pi$ нормалан на оба, па се може узети да буде њихов векторски производ.

$$\vec{n}_\pi = \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -3 \end{vmatrix} = \cdots = (2, -1, 0),$$

па је

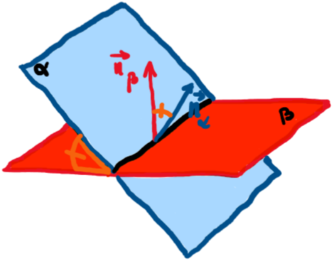
$$\pi : \ 2x - y + d = 0.$$

Уврштавањем координата било које од тачака A, B, C, добијамо $d = -1$, па је, наравно:

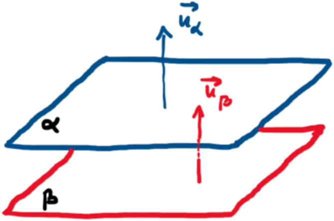
$$\boxed{\pi : \ 2x - y - 1 = 0.}$$

Узајамни положај две равни

Секу се
(постоји угао између њих)



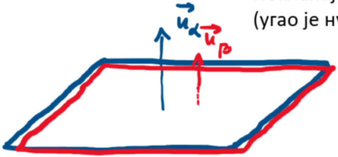
Паралелне су
(не постоји угао између њих)



Косинус оштрог угла између њих:

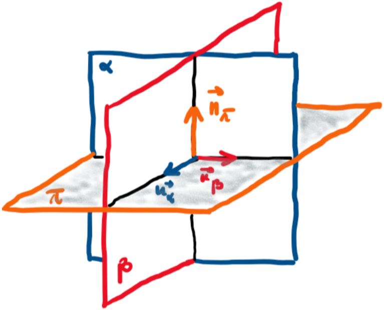
$$\cos \measuredangle(\alpha, \beta) = \frac{|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta|}{|\vec{n}_\alpha||\vec{n}_\beta|}$$

Поклапају се
(угао је нула)



Задатак

Наћи једначину равни π која садржи тачку $A(2,-1,1)$ и нормална је на равни $\alpha:\ 3x+2y-z+4=0$ и $\beta:\ x+y+z-3=0$.



Како раван π мора да буде нормална и на α и на β, њен вектор нормале мора бити нормалан на њихове. Имамо да је

$$\vec{n}_\alpha=(3,2,-1),\quad \vec{n}_\beta=(1,1,1)$$

Можемо узети $\vec{n}_\pi=\vec{n}_\alpha\times\vec{n}_\beta$.

$$\vec{n}_\pi=\vec{n}_\alpha\times\vec{n}_\beta=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=(3,-4,1).$$

Дакле, раван π има једначину

$$\pi: \; 3x - 4y + z + d = 0.$$

И даље нисмо искористили чињеницу да тачка $A(2, -1, 1)$ лежи у равни π.

$$3 \cdot 2 - 4 \cdot (-1) + 1 + d = 0$$

$$11 + d = 0$$

$$d = -11$$

Дакле, раван π има једначину

$$\boxed{\pi: \; 3x - 4y + z - 11 = 0.}$$

Када научимо рачун са правама, вратити се овде и покушати решити задатак проналажењем пресечне праве равни α и β.

Сегментни облик једначине равни

Претпоставимо да имамо раван

$$\pi: \; ax + by + cz + d = 0$$

и да је $d \neq 0$. (Шта за раван значи да је $d = 0$?)
Једначина равни се тада може трансформисати у

$$\pi: \; \frac{x}{-d/a} + \frac{y}{-d/b} + \frac{z}{-d/c} = 1,$$

односно, увођењем нових слова,

$$\pi: \; \frac{x}{m} + \frac{y}{n} + \frac{z}{p} = 1.$$

Бројеви m, n и p представљају одсечке које раван π одсеца на осама x, y и z редом.

Нека имамо раван

$$\pi : \ ax + by + cz + d = 0$$

и тачку $A(x_A, y_A, z_A)$.
Растојање тачке A од равни π дато је формулом

$$d(A, \pi) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Овде ову формулу нећемо изводити (има у уџбенику).

Задатак

Испитати узајамни положај равни α и β. Ако су паралелне, израчунати растојање између њих, а ако се секу, израчунати оштар угао који заклапају.

(a) $\alpha: \ x - y + 1 = 0$, $\beta: \ y - z + 1 = 0$;

(б) $\alpha: \ x - 2y + z - 1 = 0$, $\beta: \ 2x - 4y + 2z - 1 = 0$.

Решавамо део (a). Видимо да су вектори нормала $\vec{n}_\alpha = (1, -1, 0)$ и $\vec{n}_\beta = (0, 1, -1)$. Ова два вектора очигледно јесу линеарно независна, па се равни α и β секу. За угао између њих важи:

$$\cos \measuredangle(\alpha, \beta) = \frac{|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta|}{|\vec{n}_\alpha||\vec{n}_\beta|} = \frac{|(1, -1, 0) \cdot (0, 1, -1)|}{\sqrt{1+1+0}\sqrt{0+1+1}} = \frac{1}{2}.$$

Дакле, $\measuredangle(\alpha, \beta) = \frac{\pi}{3}$.

Решавамо део (б). Видимо да је

$$\vec{n}_\alpha = (1, -2, 1), \quad \vec{n}_\beta = (2, -4, 2) = 2\vec{n}_\alpha.$$

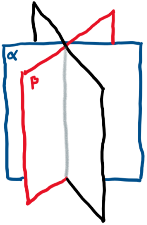
Дакле, равни су или паралелне, или се поклапају. Међутим, ако обе стране једначине равни α помножимо са 2, видимо да је

$$\alpha: \ 2x - 4y + 2z - 2 = 0, \quad \beta: \ 2x - 4y + 2z - 1 = 0,$$

што није иста једначина. Дакле равни се не поклапају, већ су паралелне. Зато тражимо растојање између њих. Знамо само формулу за растојање **тачке** од равни, не и равни од равни. Зато бирамо једну тачку са равни α. Рецимо, ако ставимо да је $y = z = 0$, добијамо да је $x = 1$, па тачка $A(1, 0, 0)$ лежи у равни α. Дакле:

$$d(\alpha, \beta) = d(A, \beta) = \frac{|2 \cdot 1 + 4 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 1|}{\sqrt{2^2 + (-4)^2 + 2^2}} = \frac{1}{\sqrt{24}}.$$

Прамен равни кроз заједничку праву



Скуп свих равни које садрже пресек равни $\alpha: \ a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ и $\beta: \ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ зове се **прамен**, или **сноп** и може се представити наредном једначином, **коју нећемо изводити**:

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 + \lambda(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0.$$

Мењањем $\lambda \in \mathbb{R}$ добијамо различите равни из прамена.
Која је раван из прамена која се једина не може добити на овај начин?

Задатак

Одредити једначину равни π која садржи пресек равни $\alpha: \; x + 2y + 3z - 4 = 0$ и $\beta: \; 3x + z - 5 = 0$ и која на координатним осама Oy и Oz одсеца подударне одсечке.

Произвољна права из прамена кроз пресек α и β дата је са

$$\pi: \; x + 2y + 3z - 4 + \lambda(3x + z - 5) = 0.$$

Наше је да нађемо λ тако да важи услов задатка. Згодно је мало трансформисати израз:

$$\pi: \; (1 + 3\lambda)x + 2y + (3 + \lambda)z + (-4 - 5\lambda) = 0.$$

Одсечак на Oy оси добијамо кад заменимо $x = z = 0$ и изразимо y: $y = \frac{4+5\lambda}{2}$.
Одсечак на Oz оси добијамо кад заменимо $x = y = 0$ и изразимо z: $z = \frac{4+5\lambda}{3+\lambda}$.

Нема бојазни од дељења нулом. За $\lambda = -3$, раван је паралелна са z осом, па на њој не одсеца ништа. Имамо два случаја:

1.1 $\frac{4+5\lambda}{2} = \frac{4+5\lambda}{3+\lambda}$ и $4 + 5\lambda \neq 0$.
Решавањем добијамо $\lambda = -1$, што нам даје раван

$$\pi_1 : \ -2x + 2y + 2z + 1 = 0.$$

1.2 $\frac{4+5\lambda}{2} = -\frac{4+5\lambda}{3+\lambda}$ и $4 + 5\lambda \neq 0$.
Решавањем добијамо $\lambda = -5$, што нам даје раван

$$\pi_2 : \ -14x + 2y - 2z + 21 = 0.$$

2 $4 + 5\lambda = 0$, то јест $\lambda = -4/5$. Тада добијамо раван $\pi_3 : \ -\frac{7}{5}x + 2y + \frac{11}{5}z = 0$, односно

$$\pi_3 : \ -7x + 10y + 11z = 0.$$

Услове задатка задовољавају три равни и то су равни π_1, π_2 и π_3.

Литература

Методичка збирка решених задатака из Математике 1.
Оливера Михић, Владимир Балтић, Марија Боричић.
ФОН, Београд, 2022.