1. ГРУПА

1. Решити парцијалну диференцијалну једначину

$$(-x^2 + xz^2)\, z'_x + (xy - yz^2 - 2z^2)\, z'_y = xz\,.$$

Решење: Придружени систем дате парцијалне j-не је $\dfrac{\mathrm{d}x}{-x^2+xz^2} = \dfrac{\mathrm{d}y}{xy - yz^2 - 2z^2} = \dfrac{\mathrm{d}z}{xz}$. Из $\dfrac{\mathrm{d}x}{-x^2+xz^2} = \dfrac{\mathrm{d}z}{xz}$ добијамо линеарну д.j. $x' + \dfrac{1}{z}x = z$, чије решење $z(3x - z^2) = C_1$ представља први интеграл придруженог система. Из $\dfrac{y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y}{-2xz^2} = \dfrac{\mathrm{d}z}{xz}$ добијамо j-ну $\mathrm{d}(xy) = -2z\,\mathrm{d}z$, чије решење $xy + z^2 = C_2$ представља још један први интеграл придруженог система. Како су добијени први интеграли очигледно независни, решење полазне парцијалне j-не $z(x,y)$ дефинисано је са $F\left(z(3x - z^2), xy + z^2\right) = 0$, где је $F(\ ,\ )$ произвољна диференцијабилна ф-ја.

2. Одредити све аналитичке ф-је $f : x + iy \to u(x,y) + iv(x,y)$ ако је

$$v(x,y) = \frac{x}{x^2 + y^2 + 2y + 1}\,.$$

Решење: Из К-Р услова добијамо $u'_x(x,y) = v'_y(x,y) = \dfrac{-2x(y+1)}{[x^2 + (y+1)^2]^2}$ и $u'_y(x,y) = -v'_x(x,y) = \dfrac{x^2 - (y+1)^2}{[x^2 + (y+1)^2]^2}$. Из $u(x,y) = \displaystyle\int u'_x(x,y)\ \mathrm{d}x + \int \left[u'_y(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int u'_x(x,y)\ \mathrm{d}x\right)\right] \mathrm{d}y$, $\displaystyle\int u'_x(x,y)\ \mathrm{d}x = \int \frac{-2x(y+1)}{[x^2 + (y+1)^2]^2}\ \mathrm{d}x = \frac{y+1}{x^2 + (y+1)^2}$ и $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\displaystyle\int u'_x(x,y)\ \mathrm{d}x\right) = \dfrac{x^2 - (y+1)^2}{[x^2 + (y+1)^2]^2}$, добијамо $u(x,y) = \dfrac{y+1}{x^2 + (y+1)^2} + C$. На крају је $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y) = \dfrac{(y+1) + ix}{x^2 + (y+1)^2} + C = \dfrac{(y+1) + ix}{[(y+1) + ix][(y+1) - ix]} + C = \ \ldots\ = \dfrac{i}{x + iy + i} + C$, односно $f(z) = \dfrac{i}{z + i} + C$.

3. Применом Лапласове трансформације решити једначину

$$y''(t) + \int_0^t (y''(x) + y(x))\ \sin(t - x)\ \mathrm{d}x = 2\cos t\,,$$

ако је $y(0) = 0$, $y'(0) = -2$.

Решење: Нека је $y(t) \xrightarrow{L} Y(s)$. Тада је $y''(t) \xrightarrow{L} s^2Y(s) - s\,y(0) - y'(0) = s^2Y(s) + 2$ и $\displaystyle\int_0^t (y''(x) + y(x))\ \sin(t-x)\ \mathrm{d}x = (y''(t) + y(t)) * \sin t \xrightarrow{L} (s^2Y(s) + 2 + Y(s))\frac{1}{s^2+1} = Y(s) + \frac{2}{s^2+1}$.
Након деловања Лапласове тр. на дату диференцијално-интегралну j-ну добијамо алгебарску j-ну $s^2Y(s) + 2 + Y(s) + \dfrac{2}{s^2+1} = \dfrac{2s}{s^2+1}$, чије решење је

$$Y(s) = -\frac{2}{s^2+1} + \frac{2s}{(s^2+1)^2} - \frac{2}{(s^2+1)^2}\,.$$

Тражена ф-ја $y(t)$ је инверзна Лапласова тр. ф-је $Y(s)$ и може се добити из табличних Лапласових тр. $\sin t \xrightarrow{L} \dfrac{1}{s^2+1}$, $t\sin t \xrightarrow{L} \dfrac{2s}{(s^2+1)^2}$ и $t\cos t \xrightarrow{L} \dfrac{s^2-1}{(s^2+1)^2}$. Добија се

$$y(t) = -2\sin t + t\sin t - (\sin t - t\cos t) = -3\sin t + t(\sin t + \cos t)\,.$$

2. ГРУПА

1. Решити парцијалну диференцијалну једначину

$$(xz+yz+2y)\,z'_x+(3z-2y)\,z'_y=z\,.$$

Решење: Придружени систем дате парцијалне једначине је $\dfrac{\mathrm{d}x}{xz+yz+2y}=\dfrac{\mathrm{d}y}{3z-2y}=\dfrac{\mathrm{d}z}{z}$. Из $\dfrac{\mathrm{d}y}{3z-2y}=\dfrac{\mathrm{d}z}{z}$ добијамо линеарну д.ј. $y'+\dfrac{2}{z}y=3$, чије решење $z^2(y-z)=C_1$ представља први интеграл придруженог система. Из $\dfrac{\mathrm{d}x+\mathrm{d}y}{(x+y+3)z}=\dfrac{\mathrm{d}z}{z}$ добијамо j-ну $\dfrac{\mathrm{d}(x+y)}{x+y+3}=\mathrm{d}z$, чије решење $\ln|x+y+3|-z=C_2$ представља још један први интеграл придруженог система. Како су добијени први интеграли очигледно независни, решење полазне парцијалне j-не $z(x,y)$ дефинисано је са $F\big(z^2(y-z),\ln|x+y+3|-z\big)=0$, где је $F(\ ,\ )$ произвољна диференцијабилна ф-ја.

2. Израчунати $\displaystyle\int\limits_{C^-}\frac{\operatorname{sh}z}{(z^2+iz)^2}\,\mathrm{d}z$, ако је $C=\{\,z\colon |z+i|=\sqrt{2}\,\}$.

Решење: С обзиром да је $f(z)=\dfrac{\operatorname{sh}z}{z^2(z+i)^2}$ и $\displaystyle\lim_{z\to0}\frac{\operatorname{sh}z}{z}\overset{\text{л.п.}}{=}\lim_{z\to0}\frac{\operatorname{ch}z}{1}=\frac{1}{1}=1$, имаћемо $\displaystyle\lim_{z\to0}(zf(z))=\lim_{z\to0}\left(\frac{\operatorname{sh}z}{z}\cdot\frac{1}{(z+i)^2}\right)=\left(\lim_{z\to0}\frac{\operatorname{sh}z}{z}\right)\cdot\left(\lim_{z\to0}\frac{1}{(z+i)^2}\right)=1\cdot\frac{1}{i^2}=-1\neq0$,
па је $z=0$ пол 1. реда и $\displaystyle\operatorname*{Res}_{z=0}f(z)=\lim_{z\to0}(zf(z))=-1$.

За $z=-i$ је $\displaystyle\lim_{z\to-i}\big((z+i)^2f(z)\big)=\lim_{z\to-i}\frac{\operatorname{sh}z}{z^2}=\frac{\operatorname{sh}(-i)}{(-i)^2}=\operatorname{sh}i\neq0$, па је $z=-i$ пол 2. реда и

$\displaystyle\operatorname*{Res}_{z=-i}f(z)=\frac{1}{1!}\lim_{z\to-i}\big((z+i)^2f(z)\big)'=\lim_{z\to-i}\left(\frac{\operatorname{sh}z}{z^2}\right)'=\lim_{z\to-i}\frac{z\operatorname{ch}z-2\operatorname{sh}z}{z^3}=-(\operatorname{ch}i+2i\operatorname{sh}i)=2\sin1-\cos1$.

На крају, $\displaystyle\int\limits_{C^-}\frac{\operatorname{sh}z}{(z^2+iz)^2}\,\mathrm{d}z=-2\pi i\left(\operatorname*{Res}_{z=0}f(z)+\operatorname*{Res}_{z=-i}f(z)\right)=-2\pi i(-1+2\sin1-\cos1)=2\pi i(1+\cos1-2\sin1)$.

3. Применом Лапласове трансформације решити једначину

$$y''+2y'+2y=e^{-t}(t+2\sin t)\,,$$

ако је $y(0)=1$, $y'(0)=2$.

Решење: Нека је $y(t)\xrightarrow{L}Y(s)$. Тада је $y'(t)\xrightarrow{L}s\,Y(s)-y(0)=s\,Y(s)-1$ и $y''(t)\xrightarrow{L}s^2Y(s)-s\,y(0)-y'(0)=s^2Y(s)-s-2$. Након деловања Лапласове тр. на дату диференцијалну j-ну добијамо алгебарску j-ну $(s^2Y(s)-s-2)+2\,(s\,Y(s)-1)+2\,Y(s)=\dfrac{1}{(s+1)^2}+\dfrac{2}{(s+1)^2+1}$, чије решење је

$$\begin{aligned}Y(s)&=\frac{s+4}{(s+1)^2+1}+\frac{1}{(s+1)^2[(s+1)^2+1]}+\frac{2}{[(s+1)^2+1]^2}\\&=\frac{s+4}{(s+1)^2+1}+\frac{1}{(s+1)^2}-\frac{1}{(s+1)^2+1}+\frac{2}{[(s+1)^2+1]^2}\\&=\frac{s+1}{(s+1)^2+1}+\frac{2}{(s+1)^2+1}+\frac{1}{(s+1)^2}+\frac{2}{[(s+1)^2+1]^2}\,.\end{aligned}$$

Ако је $Z(s)=\dfrac{s}{s^2+1}+\dfrac{2}{s^2+1}+\dfrac{1}{s^2}+\dfrac{2}{[s^2+1]^2}$ и $Z(s)\xrightarrow{L^{-1}}z(t)$, имаћемо да је $Y(s)=Z(s+1)\xrightarrow{L^{-1}}y(t)=e^{-t}z(t)$. Функцију $z(t)$ можемо добити коришћењем табличних трансформација ф-ја t, $\sin t$, $\cos t$, као и табличне трансформације $t\cos t\xrightarrow{L}\dfrac{s^2-1}{(s^2+1)^2}$. Добићемо да је $z(t)=\cos t+2\sin t+t+(\sin t-t\cos t)$, односно

$$y(t)=e^{-t}[(1-t)\cos t+3\sin t+t]\,.$$

3. ГРУПА

1. Решити парцијалну диференцијалну једначину

$$(3z-2x)\,z'_x+(xz+yz+2x)\,z'_y=z\,.$$

Решење: Придружени систем дате парцијалне једначине је $\dfrac{\mathrm{d}x}{3z-2x}=\dfrac{\mathrm{d}y}{xz+yz+2x}=\dfrac{\mathrm{d}z}{z}$. Из $\dfrac{\mathrm{d}x}{3z-2x}=\dfrac{\mathrm{d}z}{z}$ добијамо линеарну д.ј. $x'+\dfrac{2}{z}x=3$, чије решење $z^2(x-z)=C_1$ представља први интеграл придруженог система. Из $\dfrac{\mathrm{d}x+\mathrm{d}y}{(x+y+3)z}=\dfrac{\mathrm{d}z}{z}$ добијамо ј-ну $\dfrac{\mathrm{d}(x+y)}{x+y+3}=\mathrm{d}z$, чије решење $\ln|x+y+3|-z=C_2$ представља још један први интеграл придруженог система. Како су добијени први интеграли очигледно независни, решење полазне парцијалне ј-не $z(x,y)$ дефинисано је са $F\big(z^2(x-z),\ln|x+y+3|-z\big)=0$, где је $F(\ ,\ )$ произвољна диференцијабилна ф-ја.

2. Израчунати $\displaystyle\int\limits_{C^+}\frac{\operatorname{sh}z}{(z^2-iz)^2}\,\mathrm{d}z$, ако је $C=\{\,z\colon|z-i|=\sqrt{2}\,\}$.

Решење: С обзиром да је $f(z)=\dfrac{\operatorname{sh}z}{z^2(z-i)^2}$ и $\displaystyle\lim_{z\to0}\frac{\operatorname{sh}z}{z}\overset{\text{л.п.}}{=}\lim_{z\to0}\frac{\operatorname{ch}z}{1}=\frac{1}{1}=1$, имаћемо

$$\lim_{z\to0}(zf(z))=\lim_{z\to0}\left(\frac{\operatorname{sh}z}{z}\cdot\frac{1}{(z-i)^2}\right)=\left(\lim_{z\to0}\frac{\operatorname{sh}z}{z}\right)\cdot\left(\lim_{z\to0}\frac{1}{(z-i)^2}\right)=1\cdot\frac{1}{(-i)^2}=-1\neq0\,,$$

па је $z=0$ пол 1. реда и $\displaystyle\operatorname*{Res}_{z=0}f(z)=\lim_{z\to0}(zf(z))=-1$.

За $z=i$ је $\displaystyle\lim_{z\to i}\big((z-i)^2f(z)\big)=\lim_{z\to i}\frac{\operatorname{sh}z}{z^2}=\frac{\operatorname{sh}i}{i^2}=-\operatorname{sh}i\neq0$, па је $z=i$ пол 2. реда и

$$\operatorname*{Res}_{z=i}f(z)=\frac{1}{1!}\lim_{z\to i}\big((z-i)^2f(z)\big)'=\lim_{z\to i}\left(\frac{\operatorname{sh}z}{z^2}\right)'=\lim_{z\to i}\frac{z\operatorname{ch}z-2\operatorname{sh}z}{z^3}=-(\operatorname{ch}i+2i\operatorname{sh}i)=2\sin1-\cos1\,.$$

На крају, $\displaystyle\int\limits_{C^+}\frac{\operatorname{sh}z}{(z^2-iz)^2}\,\mathrm{d}z=2\pi i\left(\operatorname*{Res}_{z=0}f(z)+\operatorname*{Res}_{z=-i}f(z)\right)=2\pi i(-1+2\sin1-\cos1)\,.$

3. Применом Лапласове трансформације решити једначину

$$y''-2y'+2y=e^t(t-2\sin t)\,,$$

ако је $y(0)=1$, $y'(0)=-1$.

Решење: Нека је $y(t)\xrightarrow{L}Y(s)$. Тада је $y'(t)\xrightarrow{L}s\,Y(s)-y(0)=s\,Y(s)-1$ и $y''(t)\xrightarrow{L}s^2Y(s)-s\,y(0)-y'(0)=s^2Y(s)-s+1$. Након деловања Лапласове тр. на дату диференцијалну ј-ну добијамо алгебарску ј-ну $(s^2Y(s)-s+1)-2\,(s\,Y(s)-1)+2\,Y(s)=\dfrac{1}{(s-1)^2}-\dfrac{2}{(s-1)^2+1}$, чије решење је

$$\begin{aligned}Y(s)&=\frac{s-3}{(s-1)^2+1}+\frac{1}{(s-1)^2[(s-1)^2+1]}-\frac{2}{[(s-1)^2+1]^2}\\&=\frac{s-3}{(s-1)^2+1}+\frac{1}{(s-1)^2}-\frac{1}{(s-1)^2+1}-\frac{2}{[(s-1)^2+1]^2}\\&=\frac{s-1}{(s-1)^2+1}-\frac{3}{(s-1)^2+1}+\frac{1}{(s-1)^2}-\frac{2}{[(s-1)^2+1]^2}\,.\end{aligned}$$

Ако је $Z(s)=\dfrac{s}{s^2+1}-\dfrac{3}{s^2+1}+\dfrac{1}{s^2}-\dfrac{2}{[s^2+1]^2}$ и $Z(s)\xrightarrow{L^{-1}}z(t)$, имаћемо да је $Y(s)=Z(s-1)\xrightarrow{L^{-1}}y(t)=e^tz(t)$. Функцију $z(t)$ можемо добити коришћењем табличних трансформација ф-ја t, $\sin t$, $\cos t$, као и табличне трансформације $t\cos t\xrightarrow{L}\dfrac{s^2-1}{(s^2+1)^2}$. Добићемо да је $z(t)=\cos t-3\sin t+t-(\sin t-t\cos t)$, односно

$$y(t)=e^t[(1+t)\cos t-4\sin t+t]\,.$$

4. ГРУПА

1. Решити парцијалну диференцијалну једначину

$$(xy - xz^2 - 2z^2)\, z'_x + (-y^2 + yz^2)\, z'_y = yz\,.$$

Решење: Придружени систем дате парцијалне j-не je $\dfrac{\mathrm{d}x}{xy - xz^2 - 2z^2} = \dfrac{\mathrm{d}y}{-y^2 + yz^2} = \dfrac{\mathrm{d}z}{yz}$. Из $\dfrac{\mathrm{d}y}{-y^2 + yz^2} = \dfrac{\mathrm{d}z}{yz}$ добијамо линеарну д.j. $y' + \dfrac{1}{z}y = z$, чије решење $z(3y - z^2) = C_1$ представља први интеграл придруженог система. Из $\dfrac{y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y}{-2yz^2} = \dfrac{\mathrm{d}z}{yz}$ добијамо j-ну $\mathrm{d}(xy) = -2z\,\mathrm{d}z$, чије решење $xy + z^2 = C_2$ представља још један први интеграл придруженог система. Како су добијени први интеграли очигледно независни, решење полазне парцијалне j-не $z(x,y)$ дефинисано je са $F\big(z(3y - z^2), xy + z^2\big) = 0$, где je $F(\ ,\ )$ произвољна диференцијабилна ф-ја.

2. Одредити све аналитичке ф-је $f : x + iy \to u(x,y) + iv(x,y)$ ако je

$$u(x,y) = \frac{y+1}{x^2 + y^2 + 2y + 1}\,.$$

Решење: Из К-Р услова добијамо $v'_x(x,y) = -u'_y(x,y) = \dfrac{(y+1)^2 - x^2}{[x^2 + (y+1)^2]^2}$ и $v'_y(x,y) = u'_x(x,y) = \dfrac{-2x(y+1)}{[x^2 + (y+1)^2]^2}$. Из $v(x,y) = \displaystyle\int v'_y(x,y)\ \mathrm{d}y + \int \left[v'_x(x,y) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\int v'_y(x,y)\ \mathrm{d}y\right)\right] \mathrm{d}x$,
$\displaystyle\int v'_y(x,y)\ \mathrm{d}y = \int \frac{-2x(y+1)}{[x^2 + (y+1)^2]^2}\ \mathrm{d}y = \frac{x}{x^2 + (y+1)^2}$ и $\displaystyle\frac{\partial}{\partial x}\left(\int v'_y(x,y)\ \mathrm{d}y\right) = \frac{(y+1)^2 - x^2}{[x^2 + (y+1)^2]^2}$,
добијамо $v(x,y) = \dfrac{x}{x^2 + (y+1)^2} + C$. На крају je $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y) = \dfrac{(y+1) + ix}{x^2 + (y+1)^2} + iC = \dfrac{(y+1) + ix}{[(y+1) + ix][(y+1) - ix]} + iC = \ \ldots\ = \dfrac{i}{x + iy + i} + iC$, односно $f(z) = \dfrac{i}{z+i} + iC$.

3. Применом Лапласове трансформације решити једначину

$$y''(t) = 2\cos t - \int_0^t (y''(x) + y(x))\ \sin(t - x)\ \mathrm{d}x\,,$$

ако je $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.

Решење: Нека je $y(t) \xrightarrow{L} Y(s)$. Тада je $y''(t) \xrightarrow{L} s^2Y(s) - s\,y(0) - y'(0) = s^2Y(s) - 2$ и $\displaystyle\int_0^t (y''(x) + y(x))\ \sin(t-x)\ \mathrm{d}x = (y''(t) + y(t)) * \sin t \xrightarrow{L} (s^2Y(s) - 2 + Y(s))\frac{1}{s^2+1} = Y(s) - \frac{2}{s^2+1}$.
Након деловања Лапласове тр. на дату диференцијално-интегралну j-ну добијамо алгебарску j-ну $s^2Y(s) - 2 = \dfrac{2s}{s^2+1} - Y(s) + \dfrac{2}{s^2+1}$, чије решење je

$$Y(s) = \frac{2}{s^2+1} + \frac{2s}{(s^2+1)^2} + \frac{2}{(s^2+1)^2}\,.$$

Тражена ф-ја $y(t)$ je инверзна Лапласова тр. ф-је $Y(s)$ и може се добити из табличних Лапласових тр. $\sin t \xrightarrow{L} \dfrac{1}{s^2+1}$, $t\sin t \xrightarrow{L} \dfrac{2s}{(s^2+1)^2}$ и $t\cos t \xrightarrow{L} \dfrac{s^2-1}{(s^2+1)^2}$. Добија се

$$y(t) = 2\sin t + t\sin t + (\sin t - t\cos t) = 3\sin t + t(\sin t - \cos t)\,.$$