Математика 3 - припрема за колоквијум

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
ФАКУЛТЕТ ОРГАНИЗАЦИОНИХ НАУКА

Небојша Николић

1. ГРУПА 20.11.2009.

I КОЛОКВИЈУМ ИЗ МАТЕМАТИКЕ 3

Презиме и име:________________________________, број индекса:________

1. Решити диференцијалну једначину

$$2e^{x^2}(y' - xy) = xy^3 \sin x .$$

2. Одредити опште решење диференцијалне једначине

$$y''' - y'' + y' - y = 4\cos x - 8xe^{-x} .$$

3. Решити систем диференцијалних једначина

$$\begin{aligned} x' &= x - 2z \\ y' &= -x + 3y + z \\ z' &= 2x - 4y - 3z \end{aligned} .$$

1. ГРУПА

$\boxed{1}$ $y' - xy = \frac{1}{2} x \sin x \cdot e^{-x^2} \cdot y^3$ – Бернулијева, $z = y^{-2} \Rightarrow z' = -2y^{-3}y'$ — 15б.

$\dots\ z' + 2xz = -x \sin x \cdot e^{-x^2}$ – линеарна — 15б.

$$\Rightarrow z = e^{-\int 2x\,dx}\left[C - \int x \sin x \cdot e^{-x^2} \cdot e^{\int 2x\,dx}\,dx\right] = e^{-x^2}\left[C - \int x \sin x\,dx\right] = \frac{1}{e^{x^2}} \cdot (C + x\cos x - \sin x), \quad z = \frac{1}{y^2}$$

$$\Rightarrow \dots \Rightarrow \underline{y^2 = \frac{e^{x^2}}{C + x\cos x - \sin x}}$$ 3б.

$\boxed{2}$ $\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1 = (\lambda - 1)(\lambda^2 + 1) \Rightarrow \lambda_1 = 1,\ \lambda_{2,3} = \pm i \Rightarrow y_H = C_1 e^x + C_2 \cos x + C_3 \sin x$ 10б.

За $f_1(x) = 4\cos x$, $y_{P_1} = x(A\cos x + B \sin x) \Rightarrow \dots \Rightarrow A = B = -1 \Rightarrow y_{P_1} = -x(\cos x + \sin x)$ 10б.

За $f_2(x) = -8xe^{-x}$, $y_{P_2} = (Cx + D)e^{-x} \Rightarrow \dots \Rightarrow C = 2, D = 3 \Rightarrow y_{P_2} = (2x+3)e^{-x}$ 10б.

$\Rightarrow y = y_H + y_{P_1} + y_{P_2} = \underline{C_1 e^x + C_2 \cos x + C_3 \sin x - x(\cos x + \sin x) + (2x+3)e^{-x}}$ 3б.

$\boxed{3}$

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & -2\\ -1 & 3 & 1\\ 2 & -4 & -3\end{bmatrix} \Rightarrow \det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}1-\lambda & 0 & -2\\ -1 & 3-\lambda & 1\\ 2 & -4 & -3-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)(\lambda-3)(\lambda+3)+4(1-\lambda)-8+4(3-\lambda)=(1-\lambda)[\lambda^2-1]=-(\lambda-1)^2(\lambda+1)$$

$$\det(A-\lambda I)=0 \Leftrightarrow \underline{\lambda_{1,2}=1,\ \lambda_3=-1}$$ 10б.

За $\lambda_{1,2}=1$: $(A-\lambda_{1,2}I)\cdot M_2=0$, $(A-\lambda_{1,2}I)\cdot M_1=M_2$

$$\begin{bmatrix}0 & 0 & -2\\ -1 & 2 & 1\\ 2 & -4 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_2\\ b_2\\ c_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0 & 0 & -2\\ -1 & 2 & 1\\ 2 & -4 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1\\ b_1\\ c_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_2\\ b_2\\ c_2\end{bmatrix}$$

$$\ldots \to M_2=b_2\begin{bmatrix}2\\ 1\\ 0\end{bmatrix},\ M_1=b_1\begin{bmatrix}2\\ 1\\ 0\end{bmatrix}-b_2\begin{bmatrix}2\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$$

$$b_1=1, b_2=0 \Rightarrow \underline{X_1}=(M_1+M_2t)e^{\lambda_{1,2}t}=\ldots=\begin{bmatrix}2\\ 1\\ 0\end{bmatrix}e^{1\cdot t}$$ 12б.

$$b_1=0, b_2=1 \Rightarrow \underline{X_2}=(M_1+M_2t)e^{\lambda_{1,2}t}=\ldots=\begin{bmatrix}-2+2t\\ t\\ -1\end{bmatrix}e^{1\cdot t}$$

За $\lambda_3=-1$: $(A-\lambda_3 I)\cdot M=0$

$$\begin{bmatrix}2 & 0 & -2\\ -1 & 4 & 1\\ 2 & -4 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ b\\ c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\ldots \to M=a\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}\overset{a=1}{=}\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 1\end{bmatrix} \Rightarrow \underline{X_3}=Me^{\lambda_3 t}=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}e^{-1\cdot t}$$ 8б.

$$\Rightarrow X=\cancel{\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}}=C_1X_1+C_2X_2+C_3X_3$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=C_1\begin{bmatrix}2\\ 1\\ 0\end{bmatrix}e^{t}+C_2\begin{bmatrix}-2+2t\\ t\\ -1\end{bmatrix}e^{t}+C_3\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}e^{-t} \Rightarrow$$

$x=$ ~~~

$y=$ ~~~

$z=$ ~~~

4б.

2. ГРУПА 20.11.2009.

I КОЛОКВИЈУМ ИЗ МАТЕМАТИКЕ 3

Презиме и име:____, број индекса:__________

1. За диференцијалну једначину $2(x+2\sin y)dx-(x^2+1)\operatorname{ctg} y\,dy=0$ одредити интеграциони фактор облика $\lambda(y)$, а затим решити једначину.

2. Одредити опште решење диференцијалне једначине
$$y'''+y'=\operatorname{tg} x\,.$$

3. Решити систем диференцијалних једначина
$$\begin{aligned} x' &= -x + 2y + z \\ y' &= + 2y + z\,. \\ z' &= -2x - 2y - z \end{aligned}$$

2. ГРУПА

$\boxed{1}$ $\frac{\partial}{\partial y}\left[2\lambda(y)(x+2\sin y)\right]=\frac{\partial}{\partial x}\left[-\lambda(y)(x^2+1)\operatorname{ctg} y\right] \Rightarrow \ldots \Rightarrow \lambda'(y)(x+\cancel{2\sin y})=-\frac{\cos y}{\sin y}\lambda(y)\cdot(\cancel{2\sin y}+x) \Rightarrow$

$\int\frac{d\lambda(y)}{\lambda(y)}=-\int\frac{\cos y}{\sin y}dy \Rightarrow \ldots \Rightarrow \lambda(y)=\sin^{-1}y=\frac{1}{\sin y}$

$\Rightarrow 2\left(\frac{x}{\sin y}+2\right)dx-\frac{(x^2+1)\cos y}{\sin^2 y}dy=0$ једн. са тот. диф.

$\Rightarrow u(x,y)=\int P dx+\int\left[Q-\frac{\partial}{\partial y}\int P dx\right]dy=\ldots=\frac{x^2+1}{\sin y}+4x \Rightarrow \frac{x^2+1}{\sin y}+4x=C$

$\boxed{2}$ $\lambda^3+\lambda=\lambda(\lambda^2+1) \Rightarrow \lambda_1=0,\ \lambda_{2,3}=\pm i \Rightarrow y_h=C_1+C_2\cos x+C_3\sin x$

$$\left.\begin{aligned} C_1'+C_2'\cos x+C_3'\sin x&=0\\ -C_2'\sin x+C_3'\cos x&=0\\ -C_2'\cos x-C_3'\sin x&=\operatorname{tg}x\end{aligned}\right\} \Rightarrow \ldots \Rightarrow$$

или $\ln\left|\frac{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right|$

$$\Rightarrow\left\{\begin{aligned} C_3'&=-\frac{\sin^2 x}{\cos x} \Rightarrow C_3=C_3(x)=\sin x-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|+D_3\\ C_2'&=-\sin x \Rightarrow C_2=C_2(x)=\cos x+D_2\\ C_1'&=\frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow C_1=C_1(x)=-\ln|\cos x|+D_1\end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} y&=C_1(x)+C_2(x)\cos x+C_3(x)\cdot\sin x\\ y&=\ldots\end{aligned}$$

$\boxed{3}$ $A=\begin{bmatrix}-1&2&1\\0&2&1\\-2&-2&-1\end{bmatrix} \Rightarrow \det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}-1-\lambda&2&1\\0&2-\lambda&1\\-2&-2&-1-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+1)^2(2-\lambda)-4+2(2-\lambda)-2(\lambda+1)=\ldots=-\lambda(\lambda^2+1)$

$\Rightarrow \det(A-\lambda I)=0 \Leftrightarrow \lambda_1=0,\ \lambda_{2,3}=\pm i$

1. ГРУПА 25.11.2007.

I КОЛОКВИЈУМ ИЗ МАТЕМАТИКЕ 3

Презиме и име:______________________________, број индекса:________

1. Решити диференцијалну једначину

$$(x+1)(y'+y^2)=y\ .$$

2. Одредити партикуларно решење једначине

$$yy''-2yy'\ln y=y'^2,$$

која задовољава услов $y(0)=y'(0)=1$.

3. Одредити опште решење система диференцијалних једначина

$$\begin{aligned} x' &= -x - 2y + z \\ y' &= x + 2y \\ z' &= -3x - 2y + 3z \end{aligned}\ .$$

ФОН

1. ГРУПА

$\boxed{1}$ $\underline{(x+1)(y'+y^2)=y}$ $\Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow y' - \frac{1}{x+1} y = -y^2$ 10б. – БЕРНУЛИЈЕВА $(\alpha=2,\ z=y^{-1})$ $\Rightarrow \ldots$

$\Rightarrow z' + \frac{1}{x+1} z = 1$ – Линеарна 11б. $\Rightarrow \ldots \Rightarrow z = \frac{1}{y} = \frac{1}{x+1}\left(C + \frac{x^2}{2} + x\right) \Rightarrow \underline{y = \frac{2(x+1)}{x^2+2x+2C}}$. 12б.

$\boxed{2}$ $\underline{yy'' - 2yy'\ln y = y'^2}$, $y(0)=y'(0)=1$ $\Rightarrow z(y)=y'$, $y''=z' \cdot z$ $\Rightarrow \ldots$

$\Rightarrow z' - \frac{1}{y} z = 2\ln y$ 11б. – Линеарна $\Rightarrow \ldots \Rightarrow z = \underline{y' = y(C+\ln^2 y)}$, из К. услова добијамо $C=1$

$\Rightarrow y' = y(1+\ln^2 y) \Leftrightarrow \frac{dy}{y(1+\ln^2 y)} = dx$ 11б. $\Rightarrow \ldots \Rightarrow x = \mathrm{arctg}(\ln y) + C$, из К. услова је $C=0$

$\Rightarrow \underline{x = \mathrm{arctg}(\ln y)}$ 11б.

$\boxed{3}$ $\left.\begin{array}{l} x' = -x-2y+z \\ y' = x+2y \\ z' = -3x-2y+3z \end{array}\right\} \Rightarrow \det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & -2 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ -3 & -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \ldots = (2-\lambda)(\lambda^2-2\lambda+2) \Rightarrow \underline{\lambda_1 = 2},\ \underline{\lambda_{2,3} = 1 \pm i}$ 8б.

За $\lambda_1 = 2$: $(A-\lambda_1 E)\cdot u = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} -3a-2b+c=0 \\ a = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=0 \\ c=2b \end{array}\right\} \Rightarrow u = b\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{X_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{2t}}$ 8б.

За нпр. $\lambda_2 = 1+i$: $(A-\lambda_2 E)u = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -2-i & -2 & 1 \\ 1 & 1-i & 0 \\ -3 & -2 & 2-i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} -(2+i)a-2b+c=0 \\ a+(1-i)b = 0 \\ -3a-2b+(2-i)c=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=(i-1)b \\ c=(i-1)b \end{array}\right\} \Rightarrow u = -b\begin{bmatrix} 1-i \\ -1 \\ 1-i \end{bmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow X_{ком} = \begin{bmatrix} 1-i \\ -1 \\ 1-i \end{bmatrix} e^{(1+i)t} = \ldots = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos t + \sin t \\ -\cos t \\ \cos t + \sin t \end{bmatrix} e^t}_{=X_2} + i \underbrace{\begin{bmatrix} \sin t - \cos t \\ -\sin t \\ \sin t - \cos t \end{bmatrix} e^t}_{=X_3}$ 15б.

$\Rightarrow X = c_1X_1 + c_2X_2 + c_3X_3 = \begin{bmatrix} c_2(\cos t+\sin t)e^t + c_3(\sin t-\cos t)e^t \\ c_1e^{2t} - c_2\cos t\, e^t - c_3 \sin t\, e^t \\ 2c_1e^{2t} + c_2(\cos t+\sin t)e^t + c_3(\sin t - \cos t)e^t \end{bmatrix}$ 3б.

4. ГРУПА 25.11.2007.

I КОЛОКВИЈУМ ИЗ МАТЕМАТИКЕ 3

Презиме и име:____, број индекса:__________

1. Решити диференцијалну једначину

$$(1+y^2)dx = (\operatorname{arctg} y - x)dy\ .$$

2. Одредити опште решење диференцијалне једначине

$$y'' + 3y' - 4y = e^{-4x} + xe^{-x}\ .$$

3. Решити систем диференцијалних једначина

$$\frac{dx}{yz - xz} = \frac{y\,dy}{yz - y - xz + x} = \frac{dz}{z}\ .$$

4. ГРУПА

$\boxed{1}$ $(1+y^2)dx = (\text{arctg}\,y - x)dy \Leftrightarrow x' + \frac{1}{1+y^2}x = \frac{\text{arctg}\,y}{1+y^2}$, $x = x(y)$ – линеарна $\Rightarrow$ 10б.

$\Rightarrow x = e^{-\int \frac{1}{1+y^2}dy}\left(C + \int \frac{\text{arctg}\,y}{1+y^2} e^{\int \frac{1}{1+y^2}dy}dy\right) \Rightarrow \ldots \Rightarrow x = C \cdot e^{-\text{arctg}\,y} + \text{arctg}\,y - 1$ 22б.

$\boxed{2}$ $y'' + 3y' - 4y = e^{-4x} + xe^{-x}$

$\lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -4 \Rightarrow y_H = C_1 e^{x} + C_2 \cdot e^{-4x}$ 10б.

$y_{P1} = x \cdot e^{-4x} \cdot A \Rightarrow \ldots \Rightarrow A = -\frac{1}{5} \Rightarrow y_{P1} = -\frac{1}{5}xe^{-4x}$ 10б. $\Rightarrow y = y_H + y_{P1} + y_{P2}$

$y_{P2} = (Bx + C)e^{-x} \Rightarrow \ldots \Rightarrow B = -\frac{1}{6}, C = -\frac{1}{36} \Rightarrow y_{P2} = -\left(\frac{1}{6}x + \frac{1}{36}\right)e^{-x}$ 10б.

$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-4x} - \frac{1}{5}xe^{-4x} - \left(\frac{1}{6}x + \frac{1}{36}\right)e^{-x}$ 3б.

$\boxed{3}$ $$\frac{dx}{yz-xz}=\frac{dy}{yz-y-xz+x}=\frac{dz}{z} \Leftrightarrow \frac{dx}{(y-x)z}=\frac{dy}{(y-x)(z-1)}=\frac{dz}{z}$$

1. $\frac{dx-dy}{y-x}=\frac{dz}{z} \Rightarrow -\int\frac{d(x-y)}{x-y}=\int\frac{dz}{z} \Rightarrow \dots \Rightarrow (x-y)z=C_1$ – први интеграл 1б.

2. $\frac{dx}{-C_1}=\frac{dz}{z} \Rightarrow -\int dx = C_1\int\frac{dz}{z} \Rightarrow \dots \Rightarrow x+C_1\ln|z|=C_2 \Rightarrow x+(x-y)z\ln|z|=C_2$ – први интеграл 1б.

Добијени први интеграли су независни па представљају решење датог система. 2б.

Математика 3 - припрема за колоквијум

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
ФАКУЛТЕТ ОРГАНИЗАЦИОНИХ НАУКА

Небојша Николић