Број индекса: Име и презиме:

1.	
2.	
3.	
$\sum$	

1.

2.

3.

1. КОЛОКВИЈУМ 2013.

2. ГРУПА

Број индекса: Име и презиме:

1.	
2.	
3.	
Σ	

1. $C=(0,1)\cup(1,+\infty)$, $a*b=a^{\log_5 b}$

– ЗАТВОРЕНОСТ: $a,b\in C \Rightarrow a*b=a^{\log_5 b}>0$ (јер је $a>0$)

$a,b\in C \Rightarrow a*b=a^{\log_5 b}\neq 1$ (јер је $a\neq 1$ и $\log_5 b\neq 0$)

$a,b\in C\Rightarrow a*b\in C.$

– АСОЦИЈАТИВНОСТ: $(a*b)*c=\left(a^{\log_5 b}\right)^{\log_5 c}=a^{\log_5 b\cdot\log_5 c}=a^{\log_5\left(b^{\log_5 c}\right)}=a*(b*c).$

– НЕУТРАЛНИ ЕЛ: $a*e=a$, $e*a=5*a=5^{\log_5 a}=a$ ✓

$a^{\log_5 e}=a$ $\Rightarrow e=5\in C.$

$\log_5 e=1$

$e=5$

– ИНВЕРЗНИ ЕЛ: $a*\bar a=5$ $\bar a*a=5^{\log_a 5}*a=5^{\log_a 5\cdot\log_5 a}=5^1=5$

$a^{\log_5\bar a}=5\ /\log_a(\ )$ $\bar a=5^{\log_a 5}>0$, $\bar a=5^{\log_a 5}\neq 1$ (јер је $\log_a 5\neq 0$)

$\log_a\left(a^{\log_5\bar a}\right)=\log_a 5$ $\Rightarrow \bar a=5^{\log_a 5}\in C.$

$\log_5\bar a=\log_a 5$

$\bar a=5^{\log_a 5}$

– КОМУТАТИВНОСТ: $a*b=b*a\ /\log_5(\ )$

$\Leftrightarrow \log_5\left(a^{\log_5 b}\right)=\log_5\left(b^{\log_5 a}\right)$

$\Leftrightarrow \log_5 b\cdot\log_5 a=\log_5 a\cdot\log_5 b$, што је тачно (комутатив. у $(\mathbb{R},\cdot)$)

$\Rightarrow$ $(C,*)$ ЈЕСТЕ АБЕЛОВА ГРУПА

3. ~~2.~~

$$\bar A=\begin{array}{c} \begin{matrix} x & y & z & w & \end{matrix}\\ \left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 3 & 4 & 7 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 7-p & -1\\ 3 & 8 & 3p-4 & 19 & q+3\end{array}\right]\end{array} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 3 & 4 & 7 & 0\\ 0 & \boxed{1} & 1 & 7-p & -1\\ 0 & -1 & 3p-16 & -2 & q+3\end{array}\right]\sim$$

$$\sim\left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 3 & 4 & 7 & 0\\ 0 & \boxed{1} & 1 & 7-p & -1\\ 0 & 0 & \boxed{3(p-5)} & 5-p & q+2\end{array}\right]$$

I случај: $p=5 \wedge q\neq -2 \Rightarrow \operatorname{rang} A=2, \operatorname{rang}\bar A=3 \Rightarrow$ СИСТЕМ НЕМА РЕШЕЊА.

II случај: $p=5\wedge q=-2 \Rightarrow \operatorname{rang}A=\operatorname{rang}\bar A=2 \Rightarrow$ СИСТЕМ ИМА БЕСК. МНОГО РЕШЕЊА (2 ПАРАМЕТРА)

$$\left.\begin{array}{l}\boxed{x}+3y+4z+7w=0\\ \boxed{y}+z+2w=-1\end{array}\right\}\quad z=\alpha,\ w=\beta \Rightarrow y=-1-\alpha-2\beta,$$

$$x=-3(-1-\alpha-2\beta)-4\alpha-7\beta=3-\alpha-\beta$$

$\Rightarrow (x,y,z,w)\in\{(3-\alpha-\beta,-1-\alpha-2\beta,\alpha,\beta):\alpha,\beta\in\mathbb{R}\}$

III случај: $\underline{p \neq 5}$ $\Rightarrow \operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \bar{A} = 3 \Rightarrow$ СИСТЕМ ИМА БЕСК. МНОГО РЕШЕЊА (1 ПАРАМЕТАР)

$$\left.\begin{aligned} \boxed{x} + 3y + 4z + 7w &= 0 \\ \boxed{y} + z + (7-p)w &= -1 \\ \boxed{3(p-5)z} + (5-p)w &= q+2 \end{aligned}\right\} \qquad w = \alpha$$

$\Rightarrow 3(p-5)z = q+2+(p-5)\alpha$

$\Rightarrow z = \dfrac{q+2}{3(p-5)} + \dfrac{\alpha}{3}$

$\Rightarrow y = \dfrac{13-3p-q}{3(p-5)} + \dfrac{3p-22}{3}\alpha$

$\Rightarrow x = \dfrac{9p-q-47}{3(p-5)} + \dfrac{41-9p}{3}\alpha$

$$\Rightarrow (x,y,z,w) \in \left\{ \left(\frac{9p-q-47}{3(p-5)} + \frac{41-9p}{3}\alpha, \frac{13-3p-q}{3(p-5)} + \frac{3p-22}{3}\alpha, \frac{q+2}{3(p-5)} + \frac{1}{3}\alpha, \alpha \right) : \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

---

4. $\boxed{\cancel{3}}$ а) ВЕКТОРИ $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ И $\vec{e_4}$ СУ ЛИНЕАРНО НЕЗАВИСНИ АКО И САМО АКО СИСТЕМ $\alpha\vec{e_1} + \beta\vec{e_2} + \gamma\vec{e_3} + \delta\vec{e_4} = \vec{0}$ ИМА САМО ТРИВИЈАЛНО РЕШЕЊЕ $(\alpha=\beta=\gamma=\delta=0)$, ТЈ. АКО И САМО АКО ЈЕ $\Delta = [\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}, \vec{e_4}] \neq 0$.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & a & 5 & 2 \\ -1 & 0 & -4 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & a-3 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -4 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & a-3 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} a & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & a-3 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} a & 5 & 2 \\ 0 & -4 & -1 \\ 2 & 0 & a-3 \end{vmatrix} = \ldots =$$

$$= 2 \cdot (4a-14) + 1 \cdot (3a^2-14a+13) + 1 \cdot (-4a^2+12a+6) = \ldots = -(a^2-6a+9) = -(a-3)^2.$$

$\Delta = -(a-3)^2 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 3$ (вектори су линеарно независни).

б) ЗА $a=3$ ЈЕ $\Delta = 0$ ПА СУ ВЕКТОРИ $\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_4}$ ЛИНЕАРНО ЗАВИСНИ, ТЈ. НЕ ЧИНЕ БАЗУ ВЕКТОРСКОГ ПРОСТОРА V.

$\vec{e_1} = \alpha\vec{e_2} + \beta\vec{e_3} + \gamma\vec{e_4} \Leftrightarrow (2,-1,1,0) = \alpha(3,0,1,2) + \beta(5,-4,3,0) + \gamma(2,-1,1,0)$

$$\left.\begin{aligned} 3\alpha + 5\beta + 2\gamma &= 2 \\ -4\beta - 1\cdot\gamma &= -1 \\ 1\cdot\alpha + 3\beta + 1\cdot\gamma &= 1 \\ 2\alpha &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \ldots \Rightarrow \alpha = \beta = 0, \ \gamma = 1$$

$\Rightarrow \vec{e_1} = 0 \cdot \vec{e_2} + 0 \cdot \vec{e_3} + 1 \cdot \vec{e_4} = \vec{e_4}.$