Број индекса: Име и презиме:

1.	
2.	
3.	
$\sum$	

1.

2.

3.

ПРИМЕР 1. КОЛОКВИЈУМА ИЗ МАТЕМАТИКЕ 3

1. Одредити партикуларно решење диференцијалне једначине

$$xy'(x\cos^3 y + \operatorname{tg} y) = 1\,,$$

које задовољава услов $\quad y(1) = 0\,.$

2. Одредити опште решење диференцијалне једначине

$$y''' - 2y'' + y' - 2y = 2xe^x - 5\cos x\,.$$

3. Одредити опште решење система диференцијалних једначина

$$\begin{array}{rcrcrcr} x' & = & -x & + & y & - & 2z \\ y' & = & x & + & 3y & - & 4z \\ z' & = & 3x & + & y & - & z \end{array}\,.$$

Презиме и име : ,број индекса :

Решење 1. задатка: стране:

За $x=x(y)$ добијамо Бернулијеву ј-ну: $x' - x\cdot tgy = x^2\cos^3 y$.

Сменом $z=x^{-1}$ $(x\neq 0)$ добијамо линеарну ј-ну: $z' + z\cdot tgy = -\cos^3 y$.

$\Rightarrow z = e^{-\int tgy\,dy}\cdot\left(C - \int \cos^3 y\cdot e^{\int tgy\,dy}dy\right) = \ldots$ ← сменом $\cos y = t$

$\Rightarrow z = e^{+\ln|\cos y|}\cdot\left(C - \int \cos^3 y\cdot e^{-\ln|\cos y|}dy\right) = \ldots = \cos y\cdot\left(C - \int \frac{\cos^3 y}{\cos y}\cdot dy\right) = \ldots$ ← $\cos^2 y = \frac{1+\cos 2y}{2}$

$\Rightarrow z = \cos y\cdot\left(C - \frac{y}{2} - \frac{\sin 2y}{4}\right)$

Враћањем смене добијамо опште реш: $x = \frac{4}{\cos y\cdot(D-2y-\sin 2y)}$

За $x=1, y=0$ добијамо: $1 = \frac{4}{1\cdot(D-0-0)} \Rightarrow D=4$.

$\Rightarrow \underline{x = \frac{4}{\cos y\cdot(4-2y-\sin 2y)}}$ је тражено партикуларно реш.

Решење 2. задатка: стране:

$y''' - 2y'' + y' - 2y = 0$ је одговарајућа хом. ј-на $\Rightarrow \lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ је карακт. ј-на

$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i,\ \lambda_3 = 2$ су решења к. ј-не $\Rightarrow \ldots \Rightarrow y_H = C_1\cdot\cos x + C_2\sin x + C_3\cdot e^{2x}$.

За $f_1(x) = 2xe^x$ је $y_{P_1} = e^x(Ax+B)$, јер 1 није решење карακт. ј-не.

Заменом у ј-ну $y''' - 2y'' + y' - 2y = 2xe^x$ добијамо ... $y_{P_1} = e^x\cdot(-x)$. $(A=-1, B=0)$

За $f_2(x) = -5\cos x$ је $y_{P_2} = x^1\cdot(C\cdot\cos x + D\cdot\sin x)$, јер i јесте (једнострукo) решење к.ј-не.

Заменом у ј-ну $y''' - 2y'' + y' - 2y = -5\cos x$ добијамо ... $y_{P_2} = x\cdot\left(\frac{1}{2}\cos x + \sin x\right)$ $\left(C=\frac{1}{2}, D=1\right)$

$\Rightarrow$ Опште решење полазне ј-не је:

$$y = y_H + y_{P_1} + y_{P_2}$$

$$\Rightarrow \underline{y = C_1\cdot\cos x + C_2\cdot\sin x + C_3\cdot e^{2x} - x\cdot e^x + x\cdot\left(\frac{1}{2}\cos x + \sin x\right)}$$

$$A=\begin{bmatrix}-1&1&-2\\1&3&-4\\3&1&-1\end{bmatrix} \Rightarrow A-\lambda I=\begin{bmatrix}-1-\lambda&1&-2\\1&3-\lambda&-4\\3&1&-1-\lambda\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix}-1-\lambda&1&-2\\1&3-\lambda&-4\\3&1&-1-\lambda\end{vmatrix}=\ldots=(\lambda-1)\cdot(\lambda^2+4)$$

ИЗ КАРАКТЕРИСТИЧНЕ Ј-НЕ $\det(A-\lambda I)=0 \Leftrightarrow (\lambda-1)(\lambda^2+4)=0$ ДОБИЈАМО $\underbrace{\lambda_1=1,\ \lambda_{2,3}=\pm 2i}_{\text{СОПСТВ. ВРЕД.}}$

ЗА $\lambda_1=1$: $(A-\lambda_1 I)\cdot M=0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \left.\begin{matrix}-2a+b-2c=0\\a+2b-4c=0\\3a+b-2c=0\end{matrix}\right\}$ ДОБИЈАМО СОП. ВЕКТОР $M=\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}=c\cdot\begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix}$

$\Rightarrow X_1=M\cdot e^{\lambda t}=\begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix}\cdot e^t$ ЈЕ 1. ПАРТИКУЛАРНО РЕШ.

ЗА $\lambda_2=2i$: $(A-\lambda_2 I)\cdot M=0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \left.\begin{matrix}-(1+2i)a+b-2c=0\\a+(3-2i)b-4c=0\\3a+b-(1+2i)c=0\end{matrix}\right\}$ ДОБИЈАМО С.В. $M=\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}=\frac{c}{2}\begin{bmatrix}i\\2+i\\2\end{bmatrix}$

$$\Rightarrow X_{ком}=M\cdot e^{\lambda_2 t}=\begin{bmatrix}i\\2+i\\2\end{bmatrix}e^{2it}=\ldots=\underbrace{\begin{bmatrix}-\sin 2t\\2\cos 2t-\sin 2t\\2\cos 2t\end{bmatrix}}_{=X_2}+i\cdot\underbrace{\begin{bmatrix}\cos 2t\\\cos 2t+2\sin 2t\\2\sin 2t\end{bmatrix}}_{=X_3}=X_2+i\cdot X_3$$

ПАРТ. РЕШ.

$\Rightarrow X=C_1X_1+C_2X_2+C_3X_3$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=C_1\begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix}e^t+C_2\begin{bmatrix}-\sin 2t\\2\cos 2t-\sin 2t\\2\cos 2t\end{bmatrix}+C_3\begin{bmatrix}\cos 2t\\\cos 2t+2\sin 2t\\2\sin 2t\end{bmatrix}\Rightarrow \ldots$$

$$\Rightarrow \begin{aligned}x&=-C_2\cdot\sin 2t+C_3\cdot\cos 2t\\y&=2C_1e^t+C_2(2\cos 2t-\sin 2t)+C_3(\cos 2t+2\sin 2t)\\z&=C_1e^t+2C_2\cos 2t+2C_3\cdot\sin 2t\end{aligned}$$