УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
ФАКУЛТЕТ ОРГАНИЗАЦИОНИХ НАУКА

Радна недеља	Тематска целина		Циљ
1	**Приближни бројеви и грешке**		Овладавање основним појмовима везаним за приближне бројеве и грешке приближних бројева
	Тематска јединица	Апсолутна и релативна грешка приближног броја	Студент ће бити упознат са појмом приближног броја у пракси и дефиницијом апсолутне и релативне грешке приближног броја.
		Заокругљивање бројева	Студент ће бити упознат са правилима заокругљивања бројева уз илустрацију на конкретном примеру.

Радна недеља	**Тематска јединица**	**ЦИЉ УЧЕЊА**
1	Апсолутна и релативна грешка приближног броја	Студент ће бити упознат са појмом приближног броја у пракси и дефиницијом апсолутне и релативне грешке приближног броја.
1	Заокругљивање бројева	Студент ће бити упознат са правилима заокругљивања бројева уз илустрацију на конкретном примеру.

НАСТАВНИ МЕТОД:
Предавање

Apsolutna i relativna greška približnog broja

Definicija 1. **Približan broj** x^* realnog broja x je broj koji se "neznatno" razlikuje od x i ko risti se u izračunavanjima umesto x .

Približni brojevi se u praksi pojavljuju kao:

-Razne matematičke konstante: π, e, $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{5}$, $\log_2 3$, ...

-Rezultati raznih merenja obeležja neprekidnog tipa

- brojevi koji se upisuju u memoriju računara, ...

Da li ste znali?

- Broj x=0.1 ne može memorisati tačno ni jedan računar koji radi u binarnom brojnom sistemu!

Greška približnog broja x^* , kojim se zamenjuje tačan broj x

je razlika

$$e_{x^*} = x - x^*$$

Apsolutna i relativna greška približnog broja

Apsolutna greška približnog broja:

$$\Delta_{x^*} = \left| x - x^* \right|,$$

Granica apsolutne greške je broj A_{x^*} za koji je

$$\left| x - x^* \right| \le A_{x^*} .$$

Primer 1. Odrediti granicu apsolutne greške broja $\pi^* = 3.142$ kao aproksimacije

broja $\pi = 3.1415926553...$.

$$\left| \pi - \pi^* \right| = \left| 3.1415926553\ldots - 3.142 \right| = 0.000407344\ldots < 0.0005 = \frac{1}{2} \cdot 10^{-3} = A_{x^*} \ \Diamond$$

Napomena:

Granica apsolutne greške približnog broja se najčešće piše u obliku $\frac{1}{2} \cdot 10^{j}$ ili $1 \cdot 10^{j}, \quad (j \in \mathrm{Z})$.

Apsolutna i relativna greška približnog broja

Relativna greška približnog broja x^* je količnik

$$r_{x^*} = \frac{\Delta_{x^*}}{|x|}.$$

Granica relativne greške je broj R_{x^*} za koji važi $R_{x^*} \geq r_{x^*}$.

Granica procentualne greške: $\overline{p}\% = 100 R_{x^*}$.

Granica promilne greške: $\overline{p}\,\text{‰} = 1000 R_{x^*}$.

<u>Primer 2:</u> Neka je $x^* = 0.00005$ približna vrednost za $x = 0.00004$, a $y^* = 100500$ približna vrednost za $y = 100000$. Koja od ove dve aproksimacije je bolja?

Rešenje:

$$\Delta_{x^*} = |x - x^*| = 0.00001 \qquad r_{x^*} = \frac{\Delta_{x^*}}{|x^*|} = \frac{0.00001}{0.00005} = 0.2$$

$$\Delta_{y^*} = |y - y^*| = 500 \qquad r_{y^*} = \frac{\Delta_{y^*}}{|y^*|} = \frac{500}{100500} = 0.048. \quad \Diamond$$

Bolja je druga aproksimacija!

Apsolutna i relativna greška približnog broja

Definicija 4: Cifra α_i približnog broja x^* je **značajna cifra** ako je različita od nule. Nula je značajna cifra ako se nalazi između cifara različitih od nule ili je desno u odnosu na sve značajne cifre.

Primer 3:

$\underline{1.253}$ $\quad 0.\underline{3678}$ $\quad 0.000\underline{4567}$ $\quad 0.00\underline{4030500}$ $\Diamond$

Zapis približnog broja:

$$x^* = \pm(\alpha_1 \cdot 10^n + \alpha_2 \cdot 10^{n-1} + \cdots + \alpha_k \cdot 10^{n-k+1} + \cdots),$$

$$\text{gde je } \ \alpha_1 \neq 0, \ \ \alpha_i \in \{0,1,\ldots,9\}, \ \ (n,k \in \mathrm{Z}).$$

Primer 4:

$$0.030570 = 3 \cdot 10^{-2} + 0 \cdot 10^{-3} + 5 \cdot 10^{-4} + 7 \cdot 10^{-5} + 0 \cdot 10^{-6} \quad \Diamond$$

Apsolutna i relativna greška približnog broja

Neka je:

$$x^* = \pm(\alpha_1 \cdot 10^n + \alpha_2 \cdot 10^{n-1} + \cdots + \alpha_k \cdot 10^{n-k+1} + \cdots + \alpha_m \cdot 10^{n-m+1}).$$

Definicija 5: Značajna cifra α_k približnog broja x^* je **sigurna cifra** ako je

$$A_{x^*} \le \omega \cdot 10^{n-k+1}, \quad (0 < \omega \le 1).$$

$\omega = \frac{1}{2}$: α_k je sigurna u **užem** smislu.

$\omega = 1$: α_k je sigurna u **širem** smislu.

Primer 5: Odrediti sigurne cifre broja $x^* = 6.4257$ kao aproksimacije broja $x = 6.4281.$

$$\left| x - x^* \right| = 0.0024 < 0.005 = \frac{1}{2} \cdot 10^{-2} = A_{x^*}$$

$$x^* = 6 \cdot 10^0 + 4 \cdot 10^{-1} + \cdots \Rightarrow n = 0$$

$$\frac{1}{2} \cdot 10^{-2} \le \frac{1}{2} \cdot 10^{0-k+1} \Rightarrow k \le 2$$

Cifre 6,4 i 2 su sigurne u užem (i širem) smislu. $\diamondsuit$

Napomena:

Veza između broja sigurnih cifara i granice relativne greške data je u [1] Teoremom 1.3.1 na strani 16.

Zaokrugljivanje brojeva

Neka je dat broj:

$$x = \pm(\alpha_1 \cdot 10^n + \alpha_2 \cdot 10^{n-1} + \ldots + \alpha_m \cdot 10^{n-m+1} + \ldots).$$

Definicija 6: Postupak zamene broja x brojem x^* sa manjim brojem značajnih cifara naziva se **zaokrugljivanje** broja x ako se to izvodi u skladu sa pravilima zaokrugljivanja.

Pravila za zaokrugljivanje:

Ako se broj x zamenjuje brojem x^* koji ima m cifara, to se čini na sledeći način:

1. Ako je

$$\alpha_{m+1} \cdot 10^{n-m} + \alpha_{m+2} \cdot 10^{n-m-1} + \cdots < \frac{1}{2} \cdot 10^{n-m+1},$$

tada je

$$x^* = \pm(\alpha_1 \cdot 10^n + \alpha_2 \cdot 10^{n-1} + \cdots + \alpha_m \cdot 10^{n-m+1}) .$$

Zaokrugljivanje brojeva

2. Ako je

$$\alpha_{m+1}\cdot 10^{n-m}+\alpha_{m+2}\cdot 10^{n-m-1}+\ldots>\frac{1}{2}\cdot 10^{n-m+1},$$

tada je

$$x^{*}=\pm(\alpha_{1}\cdot 10^{n}+\ldots+(\alpha_{m}+1)\cdot 10^{n-m+1}).$$

3. Ako je

$$\alpha_{m+1}\cdot 10^{n-m}+\alpha_{m+2}\cdot 10^{n-m-1}+\ldots=\frac{1}{2}\cdot 10^{n-m+1}$$

i ako je α_m parna cifra primenjuje se prvo, a ako je α_m neparna cifra drugo pravilo (**pravilo parne cifre**).

Primeri:

1. x=3.25473; x^*=3.255
2. y=0.275; y^*=0.28
3. z=0.265; z^*=0.26
4. u=128326; u^*=128*10^3

Zaokrugljivanje brojeva

Teorema: Greška zaokrugljivanja broja nije veća od $\frac{1}{2}\cdot 10^{n-m+1}$.

Dokaz:

1. Nije došlo do povećanja. Tada je

$$x^* = \pm(\alpha_1 \cdot 10^n + \ldots + \alpha_m \cdot 10^{n-m+1}),$$

pa je

$$\left|x - x^*\right| = \alpha_{m+1}\cdot 10^{n-m} + \alpha_{m+2}\cdot 10^{n-m-1} + \ldots \le \quad 4\cdot 10^{n-m} + 9\cdot 10^{n-m-1} + 9\cdot 10^{n-m-2} + \ldots =$$

$$= \quad 4\cdot 10^{n-m} + 9\cdot 10^{n-m-1}(1 + 10^{-1} + 10^{-2} + \ldots) = \quad 4\cdot 10^{n-m} + 9\cdot 10^{n-m-1}\cdot \frac{1}{1-10^{-1}} =$$

$$= \quad 4\cdot 10^{n-m} + 10^{n-m} = 5\cdot 10^{n-m} = \frac{1}{2}\cdot 10^{n-m+1}.$$

2. Došlo je do povećanja. Tada je

$$x^* = \pm(\alpha_1 \cdot 10^n + \ldots + (\alpha_m + 1)\cdot 10^{n-m+1}),$$

pa je

Zaokrugljivanje brojeva

$$\left|x^* - x\right| = \left|\alpha_1 \cdot 10^n + ... + \alpha_m \cdot 10^{n-m-1} + 10^{n-m+1} - (\alpha_1 \cdot 10^n + ... + \alpha_m \cdot 10^{n-m-1} + ...)\right| =$$

$$= \left|10^{n-m+1} - (\alpha_{m+1} \cdot 10^{n-m} + \alpha_{m+2} \cdot 10^{n-m-1} + ...)\right| = 10^{n-m} \cdot \left|10 - (\alpha_{m+1} + \alpha_{m+2} \cdot 10^{-1} + ...)\right| \leq$$

$$\leq 10^{n-m} \cdot \left|10 - 6\right| = 4 \cdot 10^{n-m} < 5 \cdot 10^{n-m} = \frac{1}{2} \cdot 10^{n-m+1}.$$

3. $\left|x - x^*\right| = \frac{1}{2} \cdot 10^{n-m+1}$ (trivijalno).

ПИТАЊА:

1. Дефинисати апсолутну и релативну грешку приближног броја.
2. Дефинисати границе апсолутне и релативне грешке приближног броја.
3. Које цифре приближног броја су значајне?
4. Које цифре приближног броја су сигурне?
5. Навести правило заокругљивања.
6. Доказати да прво правило заокругљивања наступа ако је прва цифра која се одбацује мања од 5.
7. Доказати да прво правило заокругљивања наступа ако је прва цифра која се одбацује већа од 5 или је једнака 5, а иза ње постоји цифра различита од нуле.
8. Доказати да је број 0.1 бесконачно периодичан у бинарном запису.

ФОН

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
ФАКУЛТЕТ ОРГАНИЗАЦИОНИХ НАУКА