УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
ФАКУЛТЕТ ОРГАНИЗАЦИОНИХ НАУКА

<table>
<tr><th>Радна недеља</th><th colspan="2">Тематска целина</th><th>Циљ</th></tr>
<tr><td rowspan="3">2</td><td colspan="2">Приближни бројеви и грешке</td><td>Овладавање основним појмовима везаним за приближне бројеве и грешке приближних бројева</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Тематска јединица</td><td>Директан проблем оцене грешке</td><td>Студент ће бити упознат са формулом за ганицу апсолутне грешке приближне вредности функције и способан да је примени на решавање конкретних проблема.</td></tr>
<tr><td>Обратан проблем оцене грешке</td><td>Студент ће бити упознат са обратним проблемом оцене грешке увођењем принципа једнаких утицаја, једнаких апсолутних и једнаких релативних грешака.</td></tr>
</table>

Радна недеља	Тематска јединица	ЦИЉ УЧЕЊА
2	Директан проблем оцене грешке	Студент ће бити упознат са формулом за ганицу апсолутне грешке приближне вредности функције и способан да је примени на решавање конкретних проблема.
2	Обратан проблем оцене грешке	Студент ће бити упознат са обратним проблемом оцене грешке увођењем принципа једнаких утицаја, једнаких апсолутних и једнаких релативних грешака.

НАСТАВНИ МЕТОД:
Предавање

Direktan problem ocene greške

Uvodne napomene:

1. Lagranžova teorema za funkciju jedne promenljive:

Ako je funkcija f(x) neprekidna na odsečku $[x, x+\Delta x]$ i diferencijabilna na intervalu $(x, x+\Delta x)$, onda postoji broj $0<\Theta<1$ takav da je

$$f(x+\Delta x) - f(x) = f'(x+ \Theta \Delta x) \Delta x.$$

2. Lagranžova teorema za funkciju n promenljivih:

Ako funkcija $f(x_1,...,x_n)$ ima neprekidne parcijalne izvode, onda postoji broj $0<\Theta<1$ takav da je

$$f(x_1+\Delta x_1,...,x_n+\Delta x_n) - f(x_1,...,x_n) = f'_{x_1}(x_1+\Theta\Delta x_1,...,x_n+\Theta\Delta x_n)\Delta x_1 + \cdots + f'_{x_n}(x_1+\Theta\Delta x_1,...,x_n+\Theta\Delta x_n)\Delta x_n =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f'_{x_i}(M_\Theta)\Delta x_i$$, gde je $M_\Theta(x_1+\Theta\Delta x_1,\ldots,x_n+\Theta\Delta x_n)$

3. Ako su $a_i>0$, $(i=1, \ldots, \mathrm{n})$, onda za svako $b>0$ linearna nejednačina

$$a_1x_1+\ldots+a_nx_n<b$$

ima beskonačno mnogo rešenja $(x_1,...,x_n)$ sa pozitivnim komponentama x_i $(i=1,...,\mathrm{n})$

Direktan problem ocene greške

$y = f(x_1,\ldots,x_n)$ - tačna vrednost funkcije

$y^* = f(x_1^*,\ldots,x_n^*).$ - približna vrednost funkcije

Neka je $x_i = x_i^* \pm A_{x_i^*},\quad G = \{(x_1,\ldots,x_n) : |x_k - x_k^*| \le A_{x_k^*}, 1 \le k \le n\}.$

Tada je:

$$|y - y^*| = |f(x_1,\ldots,x_n) - f(x_1^*,\ldots,x_n^*)| = \left|\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}\left(x_1^* + \theta(x_1 - x_1^*),\ldots,x_n^* + \theta(x_n - x_n^*)\right)(x_k - x_k^*)\right| \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{n} \left|\frac{\partial f}{\partial x_k}(M_\theta)\right| \cdot |x_k - x_k^*| \le \sum_{k=1}^{n} \left|\frac{\partial f}{\partial x_k}(M_\theta)\right| \cdot A_{x_k^*} \le \sum_{k=1}^{n} \sup_{x \in G} \left|\frac{\partial f}{\partial x_k}\right| \cdot A_{x_k^*}$$

U praksi se obično koristi linearna aproksimacija greške:

$$A_{y^*} = \sum_{k=1}^{n} \left|\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_1^*,\ldots,x_n^*)\right| \cdot A_{x_k^*}.$$

Direktan problem ocene greške

Greška zbira:

$$z = f(x, y) = x + y$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 1:$$

$$A_{z^*} = A_{x^*} + A_{y^*}$$

Greška razlike:

$$z = f(x, y) = x - y$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -1:$$

$$A_{z^*} = A_{x^*} + A_{y^*}$$

Greška proizvoda:

$$z = f(x, y) = xy$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x:$$

$$A_{z^*} = \left|y^*\right| \cdot A_{x^*} + \left|x^*\right| \cdot A_{y^*}$$

Direktan problem ocene greške

$$R_{z^*} = \frac{A_{z^*}}{|z^*|} = \frac{|y^*|A_{x^*} + |x^*|A_{y^*}}{|x^* y^*|} = R_{x^*} + R_{y^*}$$

Greška količnika

$$z = f(x, y) = \frac{x}{y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}:$$

$$A_{z^*} = \frac{|y^*| \cdot A_{x^*} + |x^*| \cdot A_{y^*}}{|y^*|^2}$$

$$R_{z^*} = \frac{\dfrac{|y^*|A_{x^*} + |x^*|A_{y^*}}{|y^*|^2}}{\left|\dfrac{x^*}{y^*}\right|} = R_{x^*} + R_{y^*}$$

Obratan problem ocene greške

$$y = f(x_1, \ldots, x_n)$$

$$A_{y^*} = \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_k} \right| A_{x_k^*}$$

Odrediti granice apsolutnih grešaka $A_{x_k^*}, \ (k = 1, \ldots, n)$ **tako da granica apsolutne greške približne vrednosti funkcije bude manja od unapred zadate vrednosti** ε**:**

$$\sum_{k=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_k} \right| A_{x_k^*} \le \varepsilon$$

Obratan problem ocene greške

Principi jednakih uticaja:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x_k}\right| A_{x_k^*} = \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right| A_{x_1^*}, \qquad k = 2,\ldots,n \;:$$

$$A_{x_k^*} \le \frac{\varepsilon}{n\left|\dfrac{\partial f}{\partial x_k}\right|}, \qquad (k = 1,\ldots,n)$$

Princip jednakih apsolutnih grešaka:

$$A_{x_k^*} = A_{x_1^*}, \quad (k = 2,\ldots,n):$$

$$A_{x_k^*} \le \frac{\varepsilon}{\sum\limits_{i=1}^{n}\left|\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right|}, \quad (k = 1,\ldots,n)$$

Obratan problem ocene greške

Principi jednakih relativnih grešaka:

$$R_{x_k^*} = R_{x_1^*}, \quad (k = 2,\dots,n)$$

$$A_{y^*} = \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right| A_{x_i^*} = \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right| \left|x_i^*\right| R_{x_i^*} = R_{x_k^*} \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right| \left|x_i^*\right| \le \varepsilon$$

$$R_{x_k^*} \le \frac{\varepsilon}{\sum_{i=1}^{n} \left|x_i^*\right| \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|},$$

$$A_{x_k^*} \le \frac{\varepsilon \left|x_k^*\right|}{\sum_{i=1}^{n} \left|x_i^*\right| \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|}, \quad (k = 1,\dots,n).$$

Direktan problem ocene greške; Obratan problem ocene greške

ПИТАЊА:

1. Дефинисати директан проблем оцене грешке приближне вредности функције.
2. Формулисати и доказати теорему о оцени грешке приближне вредности функције
3. Извести формулу за апсолутну грешку збира и разлике.
4. Извести формулу зе релативну грешку производа и количника.
5. Ако је $y = x^n$, доказати да је $R_{y^*} = nR_{x^*}$.
6. Ако је $y = \sqrt[n]{x}$, доказати да је $R_{y^*} = \frac{1}{n} R_{x^*}$.
7. Формулисати обратан проблем оцене грешке приближне вредности функције.
8. Решити обратан проблем оцене грешке ако се усвоји:
   а) принцип једнаких утицаја
   б) принцип једнаких апсолутних грешака
   в) принцип једнаких релативних грешака

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
ФАКУЛТЕТ ОРГАНИЗАЦИОНИХ НАУКА