УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
ФАКУЛТЕТ ОРГАНИЗАЦИОНИХ НАУКА

Numerička analiza

Радна недеља	Тематска целина		Циљ
5	**Нумеричке методе за решавање система линеарних једначина**		Овладавање методама за решавање система линеарних једначина
	Тематска јединица	Векторске и матричне норме; Метода просте итерације	Студенту ће бити представљене векторске и матричне норме и биће способан за њихово израчунавање на конкретном проблему. Такође, студент ће бити упознат са методом просте итерације и способан за њену практичну примену.

Numerička analiza

Радна недеља	Тематска јединица	ЦИЉ УЧЕЊА
5	Векторске и матричне норме; Метода просте итерације	Студенту ће бити представљене векторске и матричне норме и биће способан за њихово израчунавање на конкретном проблему. Такође, студент ће бити упознат са методом просте итерације и способан за њену практичну примену.

НАСТАВНИ МЕТОД:
Предавање

1. VEKTORSKE I MATRIČNE NORME

X - linearan vektorski prostor

Definicija: Prostor X je normiran ako je definisana funkcija $\| \ \|: X \to \mathbf{R}$ koja ima osobine:

$1^\circ \ \|x\| \geq 0$

$2^\circ \ \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$3^\circ \ \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$

$4^\circ \ \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (nejednakost trougla)

Neka je $X = \mathbf{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) | x_i \in \mathbf{R}\}$. Tada je

$$\|x\|_p = \left\{ \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right\}^{1/p}, \ p \in [1, +\infty)$$

norma na $\mathbf{R}^n$.

Vektorske i matrične norme; Metoda proste iteracije

Specijalni slučajevi:

$$p=1: \quad \|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \qquad \text{(apsolutna norma)}$$

$$p=2: \quad \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{1/2} \qquad \text{(euklidska)}$$

$$p=\infty: \quad \|x\|_\infty = \max_{1\le i\le n} |x_i| \qquad \text{(unifomna)}$$

<u>Primer:</u> $x=(-1,1,-2)\in \mathrm{R}^3$

$$\|x\|_1 = |-1| + |1| + |-2| = 4$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{6}$$

$$\|x\|_\infty = \max\left\{|-1|, |1|, |-2|\right\} = 2$$

Vektorske i matrične norme; Metoda proste iteracije

Ako je X normiran prostor, **rastojanje** između elemenata $x, y \in X$ se definiše relacijom

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

<u>Definicija:</u> Realna funkcija $\| \ \|$ definisana na skupu kvadratnih matrica reda *n* je **matrična norma** ako su za proizvoljne matrice A i B i proizvoljan skalar α zadovoljeni sledeći uslovi:

$$1^\circ \ \|A\| \geq 0$$

$$2^\circ \ \|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$$

$$3^\circ \ \|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$$

$$4^\circ \ \|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$$

$$5^\circ \ \|AB\| \leq \|A\| \|B\|$$

Vektorske i matrične norme; Metoda proste iteracije

Primeri matričnih normi:

$$\|A\|_1 = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \quad \text{(apsolutna)}$$

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2} \quad \text{(Frobenijusova)}$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \quad \text{(uniformna)}$$

Primer:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\|A\|_1 = \max\{6,\ 6, 3\} = 6$$

$$\|A\|_F = \sqrt{1+4+2+0+\cdots+1} = \sqrt{33}$$

$$\|A\|_\infty = \max\{4, 4, 7\} = 7$$

Vektorske i matrične norme; Metoda proste iteracije

Definicija: Norma matrice je **saglasna** datoj vektorskoj normi ako je

$$\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$$

za proizvoljnu kvadratnu matricu A i proizvoljan vektor x.

Može se pokazati da su matrične norme $\|\ \|_1, \|\ \|_F$, i $\|\ \|_\infty$ saglasne odgovarajućim vektorskim.

2. SISTEMI LINEARNIH ALGEBARSKIH JEDNAČINA

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

ili

$$Ax = b \qquad (1)$$

gde je

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Pretpostavićemo da je $\det(A) \neq 0$. Tada sistem (1) ima jedinstveno rešenje.

METODE ZA REŠAVANJE SISTEMA LINEARNIH JEDNAČINA:

1) direktne (Gausova, metode faktorizacije, ...)

2) iterativne (metoda proste iteracije, Jakobijeva, Gaus-Zajdelova, ...)

METODA PROSTE ITERACIJE

<u>Ideja:</u> $Ax = b \Leftrightarrow x = Mx + B,\qquad (M$ - iteraciona matrica$)$

Iterativni proces: $x^{(k+1)} = Mx^{(k)} + B,\quad (k = 0, 1, ...)\quad (2)$

Realizacija:

$$A = N - P$$

$$(N - P)x = b$$

$$Nx = Px + b$$

$$x = N^{-1}Px + N^{-1}b$$

$$x = Mx + B;\quad M = N^{-1}P, B = N^{-1}b.$$

$$x^{(k+1)} = Mx^{(k)} + B,\quad (k = 0,1,...)$$

Vektorske i matrične norme; Metoda proste iteracije

<u>Teorema 1.:</u> Neka je $A = N - P$ i neka postoji $L > 0$ takvo da je $\|N^{-1}P\| \le L < 1$.

Tada važi:

1) A je nesingularna matrica.

2) Ako je x^t tačno rešenje sistema (1), a $\{x^{(k)}\}$ niz definisan relacijom (2), onda je

$$\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x^t.$$

3) $\|x^{(k)} - x^t\| \le L^k \|x^{(0)} - x^t\|$.

<u>Dokaz:</u>

1) Pretpostavimo da je *A* singularna matrica. Tada matrična jednačina $Ay = 0$ ima netrivijalno rešenje $y \ne 0$. (Osobina homogenog sistema linearnih jednačina!). Dalje je:

$$\|y\| = \|N^{-1}Py\| \le \|N^{-1}P\|\|y\| \le L\|y\| \Rightarrow (1-L)\|y\| \le 0 \Rightarrow y = 0$$ (kontradikcija)

Vektorske i matrične norme; Metoda proste iteracije

2), 3):

$$\left\|x^{(k)}-x^t\right\|=\left\|Mx^{(k-1)}+B-\left(Mx^t+B\right)\right\|=\left\|M\left(x^{(k-1)}-x^t\right)\right\|\le\|M\|\left\|x^{(k-1)}-x^t\right\|\le$$

$$\cdots\le M^2\left\|x^{(k-2)}-x^t\right\|\le\cdots\le L^k\left\|x^{(0)}-x^t\right\|; \qquad (\,*\,)$$

$$\left\|x^{(0)}-x^t\right\|=\left\|x^{(0)}-x^{(1)}+x^{(1)}-x^t\right\|\le\left\|x^{(0)}-x^{(1)}\right\|+\left\|x^{(1)}-x^t\right\|\le$$

$$\le\left\|x^{(0)}-x^{(1)}\right\|+L\left\|x^{(0)}-x^t\right\|$$

$$\Rightarrow \qquad (1-L)\left\|x^{(0)}-x^t\right\|\le\left\|x^{(0)}-x^{(1)}\right\|,$$

$$\left\|x^{(0)}-x^t\right\|\le\frac{1}{1-L}\left\|x^{(0)}-x^{(1)}\right\| \quad (**)$$

Iz $(*)$ i $(**)$ sledi

$$\left\|x^{(k)}-x^t\right\|\le\frac{L^k}{1-L}\left\|x^{(0)}-x^{(1)}\right\|\to 0,\, k\to\infty \quad (***)$$

pa je

$$\lim_{k\to\infty} x^{(k)}=x^t.$$

Vektorske i matrične norme; Metoda proste iteracije

Osim ocene greške date u (***), koristi se i ocena greške pomoću poslednje dve iteracije:

$$\left\|x^{(k)}-x^{t}\right\| \le L\left\|x^{(k-1)}-x^{t}\right\| = L\left\|x^{(k-1)}-x^{(k)}+x^{(k)}-x^{t}\right\| \le$$

$$\le L\left\|x^{(k-1)}-x^{(k)}\right\| + L\left\|x^{(k)}-x^{t}\right\|$$

$$\Rightarrow \qquad \left\|x^{(k)}-x^{t}\right\| \le \frac{L}{1-L}\left\|x^{(k-1)}-x^{(k)}\right\|.$$

Teorema 1. daje dovoljne uslove konvergencije iterativnog procesa (2).
U narednoj teoremi navedeni su <u>potrebni i dovoljni</u> uslovi konvergencije.

<u>Teorema 2.:</u> Iterativni proces

$$x^{(k+1)} = Mx^{(k)} + B, \quad (k = 0,1,\ldots);\ x^{(0)} \in \mathbf{R}^{n}$$

konvergira ako i samo ako je $\rho(M) < 1$, gde je

$$\rho(M) = \left\{\max|\lambda| : \lambda \text{ je sopstvena vrednost matrice } M\right\}$$

spektralni radijus matrice M.

Vektorske i matrične norme; Metoda proste iteracije

ПИТАЊА:

1. Дефинисати норму у линеарном векторском простору.
2. Навести три норме простора $\mathbf{R}^n$.
3. Дефинисати норму на скупу квадратних матрица реда n.
4. Када је матрична норма сагласна са векторском? Навести векторске норме којима су сагласне апсолутна, Фробенијусова и униформна норма.
5. Трансформисати систем $Ax=b$ у облик $x=Mx+B$ ако је $A=N-P$.
6. Навести и доказати теорему о довољном услову конвергенције методе просте итерације.
7. Навести и доказати теорему о потребном услову конвергенције методе просте итерације.
8. Које се формуле за оцену грешке користе у методи просте итерације?

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
ФАКУЛТЕТ ОРГАНИЗАЦИОНИХ НАУКА