ФОН

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
ФАКУЛТЕТ ОРГАНИЗАЦИОНИХ НАУКА

<table>
<tr><th>Радна недеља</th><th colspan="2">Тематска целина</th><th>Циљ</th></tr>
<tr><td rowspan="3">6</td><td colspan="2">Нумеричке методе за решавање система линеарних једначина</td><td>Овладавање методама за решавање система линеарних једначина</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Тематска јединица</td><td>Јакобијева метода</td><td>Студент ће бити упознат са Јакобијевом методом, као и са довољним и потребним и довољним условима конвергенције. Такође, биће способан за практичну примену Јакобијеве методе.</td></tr>
<tr><td>Гаус – Зајделова метода</td><td>Студент ће бити упознат са Гаус - Зајedловом методом, као и са довољним и потребним и довољним условима конвергенције. Такође, биће способан за практичну примену Гаус - Зајedлове методе.</td></tr>
</table>

Радна недеља	Тематска јединица	ЦИЉ УЧЕЊА
6	Јакобијева метода	Студент ће бити упознат са Јакобијевом методом, као и са довољним и потребним и довољним условима конвергенције. Такође, биће способан за практичну примену Јакобијеве методе.
6	Гаус – Зајделова метода	Студент ће бити упознат са Гаус - Заједловом методом, као и са довољним и потребним и довољним условима конвергенције. Такође, биће способан за практичну примену Гаус - Заједлове методе.

НАСТАВНИ МЕТОД:
Предавање

Jakobijeva metoda

$$Ax = b \qquad (1)$$

$$A = L + U + D$$

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & 0 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$Ax = b \Leftrightarrow (L + D + U)x = b \Leftrightarrow Dx = -(L+U)x + b$$

$$\Leftrightarrow x = -D^{-1}(L+U)x + D^{-1}b$$

$$x^{(k+1)} = -D^{-1}(L+U)x^{(k)} + D^{-1}b, \ (k = 0, 1, \ldots)$$

Iteraciona matrica:

$$M_J = -D^{-1}(L+U) = -\begin{pmatrix} 0 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \cdots & \frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ \frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \cdots & \frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{a_{n1}}{a_{nn}} & \frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Jakobijeva metoda

Skalarno: $$x_i^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{ii}}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_{ij}x_j^{(k)} + \frac{b_i}{a_{ii}}, \quad (i=1,\dots,n; \quad k=0,1,\dots)$$

Jakobijeva metoda je specijalan slučaj metode proste iteracije ako se uzme $N=D$ i $P=-(L+U)$

Teorema 1.(dovoljan uslov konvergencije): Ako je A dijagonalno dominantna, tj ako je

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|, \quad i=1,\dots,n.$$

onda je matrica A regularna i niz $\{x^{(k)}\}$ konvergira rešenju sistema (1) za proizvoljno $x^{(0)}$.

Dokaz: Iz dijagonalne dominantnosti sledi da je $\|M_J\|_\infty < 1$.

Jakobijeva metoda

Teorema 2.(potreban i dovoljan uslov konvergencije): Potreban i dovoljan uslov da niz $\{x^{(k)}\}$ konvergira rešenju sistema (1) je da sva rešenja jednačine

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & \lambda a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \lambda a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

zadovoljavaju uslov $|\lambda| < 1$.

Dokaz:

$$\det\left(M_J - \lambda I\right) = \det\left(-D^{-1}\left(L+U\right) - \lambda I\right) = -\det\left(D^{-1}\left(L+U+\lambda D\right)\right) =$$

$$= -\det\left(D^{-1}\right)\cdot\det\left(L+U+\lambda D\right) = 0 \Leftrightarrow \det\left(L+U+\lambda D\right) = 0 \quad \text{jer je } \det(D^{-1}) \neq 0.$$

Međutim,

$$\det(L+U+\lambda D) = \begin{vmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \lambda a_{nn} \end{vmatrix}$$

Gaus – Zajdelova metoda

$$A = L + D + U: \qquad (L+D+U)x = b$$

$$(L+D)x = -Ux + b$$

$$(L+D)x^{(k+1)} = -Ux^{(k)} + b; \quad k = 0,1,\ldots$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Skalarno:

$$a_{11}x_1^{(k+1)} = -(a_{12}x_2^{(k)} + \cdots + a_{1n}x_n^{(k)}) + b_1$$

$$a_{21}x_1^{(k+1)} + a_{22}x_2^{(k+1)} = -(a_{23}x_3^{(k)} + \cdots + a_{2n}x_n^{(k)}) + b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{n1}x_1^{(k+1)} + a_{n2}x_2^{(k+1)} + \cdots + a_{n-1,n}x_{n-1}^{(k+1)} + a_{nn}x_n^{(k+1)} = b_n$$

$$x^{(k+1)} = -(L+D)^{-1}Ux^{(k)} + (L+D)^{-1}b; \quad k = 0,1,\ldots \qquad (1)$$

Gaus – Zajdelova metoda

Iteraciona matrica:

$$M_G = -(D+L)^{-1} U.$$

Gaus – Zajdelova metoda je spacijalan slučaj metode proste iteracije ako se uzme $N=L+D$ i $P=-U$.

Dovoljni uslovi konvergencije:

1) A je simetrična i pozitivno definitna matrica

2) dijagonalna dominantnost matrice A

<u>Teorema (potreban i dovoljan uslov konvergencije):</u> Niz (1) konvergira rešenju sistema ako i samo ako svi koreni jednačine

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \cdots & \lambda a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

zadovoljavaju uslov $|\lambda| < 1$.

Gaus – Zajdelova metoda

Dokaz: $\det(M_G - \lambda I) = \det(-(D+L)^{-1}U - \lambda I) = -\det(D+L)^{-1}\det(U + \lambda(D+L)) = 0$

$\Rightarrow \det(U + \lambda(D+L)) = 0$

Napomene:

• Ako se Gaus – Zajdelova metoda primeni na Jakobijevu dobije se **varijanta Nekrasova**.

• U najvećem broju slučajeva Gaus – Zajdelova metoda konvergira brže od metode proste iteracije. Međutim, mogući su slučajevi kada Gaus – Zajdelova metoda konvergira sporije, pa čak i slučajevi kada metoda proste iteracije konvergira, a Gaus – Zajdelova metoda divergira.

Jakobijeva metoda; Gaus – Zajdelova metoda

ПИТАЊА:

1. Како се декомпонује матрица A код Јакобијеве методе?
2. Под којим условима матица D инверзну? Наћи D^{-1}.
3. Трансформисати систем $Ax=b$ у облику $x=M_J x+B$. Шта је M_J?
4. Формулисати и доказати теорему о довољним условима конвергенције Јакобијеве методе.
5. Формулисати и доказати теорему о потребним и довољним условима Јакобијеве методе? Зашто је $\det(D^{-1}) \neq 0$?
6. Шта је основна идеја Гаус – Зејделове методе? Како се она реализује?
7. Трансформисати систем $Ax=b$ у облик $x=M_G x+B$. Шта је M_G?
8. Навести довољне услове конвергенције Гаус – Зајделове методе.
9. Формулисати и доказати теорему о потребним и довољним условима конвергенције Гаус – Зајделове методе.

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
ФАКУЛТЕТ ОРГАНИЗАЦИОНИХ НАУКА