ФОН

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
ФАКУЛТЕТ ОРГАНИЗАЦИОНИХ НАУКА

Numerička analiza

Радна недеља	Тематска целина		Циљ
7	**Системи нелинеарних једначина**		Овладавање методама за решавање система нелинеарних једначина
	Тематска јединица	Метода итерације	Студент ће бити упознат са методом итерације и доказом основне теореме о конвергенцији. Такође, биће способан за самостално решавање практичних проблема овом методом.
		Метода Њутн - Канторовича	Студент ће бити способан да самостално решава системе нелинеарних једначина методом Њутн – Канторовича за случај две једначине, а биће упознат и са применом ове методе у општем

Радна недеља	Тематска јединица	ЦИЉ УЧЕЊА
7	Метода итерације	Студент ће бити упознат са методом итерације и доказом основне теореме о конвергенцији. Такође, биће способан за самостално решавање практичних проблема овом методом.
7	Метода Њутн - Канторовича	Студент ће бити способан да самостално решава системе нелинеарних једначина методом Њутн – Канторовича за случај две једначине, а биће упознат и са применом ове методе у општем случају.

НАСТАВНИ МЕТОД:
Предавање

Metoda iteracije

Prethodne napomene:

1. Zbir geometrijskog reda:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \frac{a_1}{1-q}, \quad |q| < 1$$

2. Niz $\{\boldsymbol{x}^{(n)}\}$ je Košijev niz u prostoru R^n ako

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0(\varepsilon) \in \mathrm{N})(p, m > n_0(\varepsilon) \Rightarrow \|x_p - x_m\| < \varepsilon)$$

Svaki Košijev niz u prostoru R^n je konvergentan.

3. Razvoj funkcije f(x,y) u Tejlorov red u okolini tačke (x_0, y_0):

$$f(x,y) = f(x_0, y_0) + f_x'(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y'(x_0, y_0)(y - y_0) +$$
$$+ \frac{1}{2!}\left[f_{xx}''(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + 2 f_{xy}''(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + f_{yy}''(x_0, y_0)(y - y_0)^2 \right] + \cdots$$

Metoda iteracije

$$\left.\begin{array}{l} f_1(x_1,\dots,x_n)=0 \\ \vdots \\ f_n(x_1,\dots,x_n)=0 \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Vektorski zapis:

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0} \qquad (2)$$

$$\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

1. METODA ITERACIJE

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}) \qquad (3)$$

$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1(x_1,\dots,x_n) \\ \vdots \\ g_n(x_1,\dots,x_n) \end{bmatrix},$$

$g_i(\boldsymbol{x})$ su neprekidno diferencijabilne u zatvorenoj i ograničenoj oblasti D

Izvod funkcije G:

$$G'(x) = J(x) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial g_n}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial g_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \qquad \text{(Jakobijan)}$$

Metoda iteracije

Neka je $\left|\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x)\right| \le L_{ij}, \;(i, j = 1,\dots,n,\; x \in D)$

$$L_1 = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} L_{ij},$$

$$L_\infty = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} L_{ij},$$

$$L_F = \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} L_{ij}^2 \right)^{1/2}$$

Važi nejednakost:

$$\|\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{G}(\boldsymbol{y})\| \le L_p \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|, \quad (\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in D; \forall p \in \{1, \infty, F\})$$

Neka je

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}^{(k)}), \quad (k = 0,1,\dots) \qquad (4)$$

$$x^{(0)} \in D \text{ (zatvorena oblast)}$$

Teorema (dovoljan uslov konvergencije): Neka $G: D \to D$ i neka je $0 < L_p < 1$ za bar jedan $p \in \{1, \infty, F\}$. Tada je:

1. Jednačina $\mathbf{x} = G(\mathbf{x})$ ima jedinstveno rešenje $\mathbf{s} \in D$
2. Niz definisan sa (4) konvergira ka $\mathbf{s}$
3. $\left\| \mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{s} \right\|_p \le \dfrac{L_p^n}{1 - L_p} \left\| \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0 \right\|_p$

Dokaz:

1.,2.:

$$\left\| \mathbf{x}^{(n+1)} - \mathbf{x}^{(n)} \right\|_p = \left\| G\left(\mathbf{x}^{(n)}\right) - G\left(\mathbf{x}^{(n-1)}\right) \right\|_p \le L_p \left\| \mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{x}^{(n-1)} \right\|_p \le \cdots \le L_p^n \left\| \mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)} \right\|_p$$

Neka je $l > m$. Tada važi:

$$\begin{aligned}
\left\| \mathbf{x}^{(l)} - \mathbf{x}^{(m)} \right\|_p &= \left\| \mathbf{x}^{(l)} - \mathbf{x}^{(l-1)} + \mathbf{x}^{(l-1)} - \mathbf{x}^{(l-2)} + \cdots + \mathbf{x}^{(m+1)} - \mathbf{x}^{(m)} \right\|_p \le \\
&\le \left\| \mathbf{x}^{(l)} - \mathbf{x}^{(l-1)} \right\|_p + \left\| \mathbf{x}^{(l-1)} - \mathbf{x}^{(l-2)} \right\|_p + \cdots + \left\| \mathbf{x}^{(m+1)} - \mathbf{x}^{(m)} \right\|_p \le \\
&\le L_p^{l-1} \left\| \mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)} \right\|_p + L_p^{l-2} \left\| \mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)} \right\|_p + \cdots + L_p^m \left\| \mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)} \right\|_p = \\
&= \left(L_p^{l-1} + L_p^{l-2} + \cdots + L_p^m \right) \left\| \mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)} \right\|_p < \left(L_p^m + \cdots + L_p^{l-2} + L_p^{l-1} + \cdots \right) \left\| \mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)} \right\|_p = \\
&= \frac{L_p^m}{1 - L_p} \left\| \mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)} \right\|_p \to 0, \quad m \to \infty.
\end{aligned}$$

Metoda iteracije

Niz $\left\{x^{(n)}\right\}$ Košijev, pa konvergira ka $s \in D$. Ako u (4) pređemo na graničnu vrednost, zbog neprekidnosti preslikavanja G biće

$$s = \lim_{n\to\infty} x^{(n+1)} = \lim_{n\to\infty} G\left(x^{(n)}\right) = G\left(\lim_{n\to\infty} x^{(n)}\right) = G(s)$$

Dakle, $\boldsymbol{s}$ je nepokretna tačka preslikavanja G, a time i rešenje $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})=\mathbf{0}$.

3.: $$\left\|\boldsymbol{x}^{(n)}-\boldsymbol{s}\right\|_p = \left\|G\left(\boldsymbol{x}^{(n-1)}\right)-G(\boldsymbol{s})\right\|_p \le L_p\left\|\boldsymbol{x}^{(n-1)}-\boldsymbol{s}\right\| \le \cdots \le L_p^n\left\|\boldsymbol{x}^{(0)}-\boldsymbol{s}\right\|_p \qquad (*)$$

Međutim,

$$\left\|\boldsymbol{x}^{(0)}-\boldsymbol{s}\right\|_p = \left\|\boldsymbol{x}^{(0)}-\boldsymbol{x}^{(1)}+\boldsymbol{x}^{(1)}-\boldsymbol{s}\right\|_p \le \left\|\boldsymbol{x}^{(0)}-\boldsymbol{x}^{(1)}\right\|_p + \left\|\boldsymbol{x}^{(1)}-\boldsymbol{s}\right\|_p \le$$

$$\le \left\|\boldsymbol{x}^{(0)}-\boldsymbol{x}^{(1)}\right\|_p + L_p\left\|\boldsymbol{x}^{(0)}-\boldsymbol{s}\right\| \Rightarrow$$

$$\left(1-L_p\right)\left\|\boldsymbol{x}^{(0)}-\boldsymbol{s}\right\|_p \le \left\|\boldsymbol{x}^{(0)}-\boldsymbol{x}^{(1)}\right\|_p$$

$$\left\|\boldsymbol{x}^{(0)}-\boldsymbol{s}\right\|_p \le \frac{1}{1-L_p}\left\|\boldsymbol{x}^{(0)}-\boldsymbol{x}^{(1)}\right\|_p . \qquad (**)$$

Iz $(*)$ i $(**)$ sledi

$$\left\|\boldsymbol{x}^{(n)}-\boldsymbol{s}\right\|_p \le \frac{L_p^n}{1-L_p}\left\|\boldsymbol{x}^{(0)}-\boldsymbol{x}^{(1)}\right\|_p$$

Napomena: Ocena greške može se dobiti i preko poslednje iteracije (udžbenik, strana 100):

$$\left\|x^{(n)}-s\right\|_p \leq \frac{L_p}{1-L_p}\left\|x^{(n)}-x^{(n-1)}\right\|_p$$

METODA NJUTN – KANTOROVIČA

Neka je dat nelinearni sistem od dve jednačine:

$$\left.\begin{aligned} f(x,y)=0 \\ g(x,y)=0 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

gde su f i g neprekidno diferencijabilne funkcije.

Ako je (x, y) tačno rešenje sistema (1), a (x_n, y_n) n – ta aproksimacija rešenja, onda je

$$x = x_n + h_n$$
$$y = y_n + k_n$$

Metoda Njutn - Kantoroviča

tj.

$$f\left(x_n + h_n, y_n + k_n\right) = 0$$
$$g\left(x_n + h_n, y_n + k_n\right) = 0,$$

odnosno

$$f(x_n, y_n) + h_n f_x'(x_n, y_n) + k_n f_y'(x_n, y_n) + O_1(h_n, k_n) = 0$$
$$g(x_n, y_n) + h_n g_x'(x_n, y_n) + k_n g_y'(x_n, y_n) + O_2(h_n, k_n) = 0.$$

Ako se zadržimo na linearnim članovima u odnosu na h_n i k_n dobijamo

$$f_x'(x_n, y_n)h_n + f_y'(x_n, y_n)k_n = -f(x_n, y_n)$$
$$g_x'(x_n, y_n)h_n + g_y'(x_n, y_n)k_n = -g(x_n, y_n)$$

ili

$$J\left(x_n, y_n\right)\begin{bmatrix} h_n \\ k_n \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} f\left(x_n, y_n\right) \\ g\left(x_n, y_n\right) \end{bmatrix},$$

pa je

$$\begin{bmatrix} h_n \\ k_n \end{bmatrix} = -J^{-1}\left(x_n, y_n\right)\begin{bmatrix} f\left(x_n, y_n\right) \\ g\left(x_n, y_n\right) \end{bmatrix}.$$

Metoda Njutn - Kantoroviča

Obzirom da smo zanemarili nelinearne članove, možemo pisati

$$x_{n+1} = x_n + h_n$$

$$y_{n+1} = y_n + k_n$$

Opšta ideja:

$$F(\boldsymbol{x}) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = G(\boldsymbol{x})$$

Def.: Nek je $\lim\limits_{n\to\infty} x^{(n)} = s$. Red konvergencije je k ako postoji konstanta C_k takva da je

$$\frac{\left\|\boldsymbol{x}^{(n+1)} - \boldsymbol{s}\right\|}{\left\|\boldsymbol{x}^{(n)} - \boldsymbol{s}\right\|^k} \le C_k, \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

k=1: linearna konvergencija

k=2: kvadratna konvergencija

Teorema: Ako je $G'(s) \neq 0$, konvergencija je linearna, a ako je $G'(s) = 0$, konvergencija je kvadratna.

Neka je

$$G(\boldsymbol{x}) = X + \Lambda(\boldsymbol{x}) F(\boldsymbol{x})$$

Metoda Njutn - Kantoroviča

Funkciju $\Lambda(x)$ biramo iz uslova da je $G'(s)=0$.

$$G'(\boldsymbol{x}) = I + \Lambda'(\boldsymbol{x})F(\boldsymbol{x}) + \Lambda(\boldsymbol{x})F'(\boldsymbol{x}),$$

$$G'(\boldsymbol{s}) = I + \Lambda'(\boldsymbol{s})F(\boldsymbol{s}) + \Lambda(\boldsymbol{s})F'(\boldsymbol{s}) = 0$$

$F(\boldsymbol{s})=0:$ $\quad \Lambda(\boldsymbol{s}) = -\left[F'(\boldsymbol{s})\right]^{-1},$

$$\Lambda(\boldsymbol{x}) = -\left[F'(\boldsymbol{x})\right]^{-1} = -\left[J(\boldsymbol{x})\right]^{-1}$$

Prema tome je

$$x = x - \left[J(\boldsymbol{x})\right]^{-1} F(\boldsymbol{x})$$

pa niz

$$\boldsymbol{x}^{(n+1)} = \boldsymbol{x}^{(n)} - \left[J\left(\boldsymbol{x}^{(n)}\right)\right]^{-1} F\left(\boldsymbol{x}^{(n)}\right), \quad \left(n = 0,1,\ldots, \quad x^{(0)} \in D\right)$$

konvergira rešenju sistema $F(x)=0$ i ima najmanje kvadratnu konvergenciju.

Metoda iteracije;
Metoda Njutn - Kantoroviča

ПИТАЊА:

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
ФАКУЛТЕТ ОРГАНИЗАЦИОНИХ НАУКА