УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
ФАКУЛТЕТ ОРГАНИЗАЦИОНИХ НАУКА

Numerička analiza

<table>
<tr><th>Радна недеља</th><th colspan="2">Тематска целина</th><th>Циљ</th></tr>
<tr><td rowspan="3">11</td><td colspan="2">Полиномска интерполација</td><td>Упознавање са и овладавање проблема полиномске интерполације</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Тематска јединица</td><td>Коначне разлике. Њутнов интерполациони полином са коначним разликама.</td><td>Студент ће бити способан да изведе Њутнов интерполациони полином са коначним разликама и да изрази везу између подељених и коначних разлика, као и да решава конкретне проблеме.</td></tr>
<tr><td>Инверзна интерполација</td><td>Студент ће бити упознат са проблемом инверзне интерполације и њеним применама и биће способан да самостално решава ову класу проблема.</td></tr>
</table>

Радна недеља	Тематска јединица	ЦИЉ УЧЕЊА
11	Коначне разлике. Њутнов интерполациони полином са коначним разликама.	Студент ће бити способан да изведе Њутнов интерполациони полином са коначним разликама и да изрази везу између подељених и коначних разлика, као и да решава конкретне проблеме.
11	Инверзна интерполација	Студент ће бити упознат са проблемом инверзне интерполације и њеним применама и биће способан да самостално решава ову класу проблема.

НАСТАВНИ МЕТОД:
Предавање

6.5 KONAČNE RAZLIKE

Definicija: Ako $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ i $h\in\mathbf{R}$, onda je

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$$

konačna razlika prvog reda u tački x.

Konačne razlike višeg reda:

$$\Delta^{k+1} f(x) = \Delta(\Delta^k f(x)), \quad (k=1,2,3,\ldots)$$

Ako je $x_i = x_0 + ih, (i=0,1,\ldots)$ onda je

$$\Delta f(x_i) = f(x_{i+1}) - f(x_i)$$

$$\Delta^2 f(x_i) = \Delta f(x_{i+1}) - \Delta f(x_i)$$

$$\vdots$$

Konačne razlike; Njutnov interpolacioni polinom sa konačnim razlikama

Veza između podeljenih i konačnih razlika:

Lema: Neka je $x_{i+k} = x_i + kh \in [a,b], (k = 0,1,\dots,n), f : [a,b] \to \mathbf{R}$. Tada je za $k \in \{0,\dots,n\}$

$$f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] = \frac{\Delta^k f(x_i)}{k!h^k}$$

Dokaz:

$k = 1$: $\quad f[x_i, x_{i+1}] = \dfrac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = \dfrac{\Delta f(x_i)}{h}$

Pretpostavimo da je $f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+m}] = \dfrac{\Delta^m f(x_i)}{m!h^m}$ za neko $m<n$.

Tada je

$$f[x_i, \dots, x_{i+m}, x_{i+m+1}] = \frac{f[x_{i+1}, \dots, x_{i+m+1}] - f[x_i, \dots, x_{i+m}]}{x_{i+m+1} - x_i} = \frac{\dfrac{\Delta^m f(x_{i+1})}{m!h^m} - \dfrac{\Delta^m f(x_i)}{m!h^m}}{(m+1)h} = \frac{\Delta^{m+1} f(x_i)}{(m+1)!h^{m+1}}$$

NJUTNOV INTERPOLACIONI POLINOM ZA EKVIDISTANTNE ČVOROVE

$$P_n(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \cdots$$
$$\cdots + f[x_0, x_1, \ldots, x_n](x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})$$

$$x_i = x_0 + ih, \quad (i = 0, \ldots, n)$$

Smena: $\dfrac{x - x_0}{h} = s \Rightarrow x = x_0 + sh$

$$f[x_0,x_1,\dots,x_k](x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{k-1})=\frac{\Delta^k f(x_0)}{k!h^k}\cdot sh\cdot(x_0+sh-x_0-h)(x_0+sh-x_0-2h)\dots(x_0+sh-x_0-(k-1)h)=$$

$$=\frac{\Delta^k f(x_0)}{k!}s(s-1)\dots(s-k+1)=\binom{s}{k}\Delta^k f(x_0)$$

Prema tome je:

$$P_n(x)=P_n(x_0+sh)=f(x_0)+\binom{s}{1}\Delta f(x_0)+\binom{s}{2}\Delta^2 f(x_0)+\dots+\binom{s}{n}\Delta^n f(x_0)=\sum_{k=0}^{n}\binom{s}{k}\Delta^k f(x_0)$$

6.6 INVERZNA INTERPOLACIJA

<u>Zadatak:</u> rešavanje po x jednačine $f(x)=y$ ako je $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ data tabelarno

x	x_0	x_1	...	x_n
$f(x)$	y_0	y_1	...	y_n

1. f je <u>monotona:</u> postoji $f^{-1}(y)$ i može se aproksimirati npr. Lagranžovim interpolacionim polinomom:

$$x=\sum_{k=0}^{n}x_k\prod_{\substack{i=0\\ i\neq 0}}^{n}\frac{y-y_i}{y_k-y_i}$$

Inverzna interpolacija

Takođe,

$$x = x_0 + f^{-1}[y_0, y_1](y - y_0) + \cdots + f^{-1}[y_0, \ldots, y_n](y - y_0)\ldots(y - y_{n-1})$$

2. f <u>nije monotona:</u>

$$P_n(x) = y \qquad \text{(alg. jedn. } n \text{ - tog stepena)}$$

Čvorovi ekvidistantni:

$$f(x_0) + \binom{s}{1}\Delta f(x_0) + \cdots + \binom{s}{n}\Delta^n f(x_0) = y$$

$$\Delta f(x_0) \neq 0, \quad y_0 < y < y_1 \Rightarrow x \in (x_0, x_1):$$

$$s = \frac{1}{\Delta f(x_0)}\left(y - f(x_0) - \binom{s}{2}\Delta^2 f(x_0) - \cdots - \binom{s}{n}\Delta^n f(x_0)\right),$$

$$s = g(s)$$

$$s_k = g(s_{k-1}), \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

$$s = \lim_{k\to\infty} s_k \Rightarrow x = x_0 + sh$$

ПИТАЊА:

1. Дефинисати коначне разлике првог, другог, k – тог реда у чвору x_i.
2. Доказати лему о вези између подељених и коначних разлика.
3. Извести формулу за Њутно интерполациони полином за еквидистантне чворове.
4. Шта је задатак инверзне интерполације?
5. Како се решава проблем инверзне интерполације ако је функција монотона?

ФОН

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
ФАКУЛТЕТ ОРГАНИЗАЦИОНИХ НАУКА