УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
ФАКУЛТЕТ ОРГАНИЗАЦИОНИХ НАУКА

Numerička analiza

Радна недеља	Тематска целина		Циљ
10	**Полиномска интерполација**		Упознавање са и овладавање проблема полиномске интерполације
	Тематска јединица	Подељене разлике. Њутнов интерполациони полином са подељеним разликама.	Студент ће бити способан да изведе Њутнов интерполациони полином са подељеним разликама, као и да га примени на решавање конкретних проблема.
		Оцена грешке полиномске интерполације	Студент ће бити упознат са теоремом о оцени грешке полиномске интерполације и биће способан да теорему примени.

Радна недеља	Тематска јединица	ЦИЉ УЧЕЊА
10	Подељене разлике. Њутнов интерполациони полином са подељеним разликама.	Студент ће бити способан да изведе Њутнов интерполациони полином са подељеним разликама, као и да га примени на решавање конкретних проблема.
10	Оцена грешке полиномске интерполације	Студент ће бити упознат са теоремом о оцени грешке полиномске интерполације и биће способан да теорему примени.

НАСТАВНИ МЕТОД:
Предавање

UVODNE NAPOMENE:

1. **Rolova teorema:** Ako je funkcija f(x) neprekidna na odsečku [a,b], diferencijabilna na intervalu (a,b) i ako je f(a) = f(b), onda postoji tačka $c \in (a,b)$ takva da je $f'(c) = 0.$

2. **Posledica Rolove teoreme:** Između svake dve susedne nule diferencijabilne funkcije postoji bar jedna nula izvoda te funkcije.

Podeljene razlike; Njutnov interpolacioni polinom sa podeljenim razlikama

6.3. NJUTNOV INTERPOLACIONI POLINOM ZA NEEKVIDISTANTNE ČVOROVE

Podeljene razlike:

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$, (prvog reda u čvoru x_i)

$$\vdots$$

$$f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}] - f[x_i, \ldots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}$$, (k-tog reda u čvoru x_i)

Lema (veza podeljenih razlika i vrednosti funkcije):

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_k] = \sum_{i=0}^{k} \frac{f(x_i)}{(x_i - x_0)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)}$$

Npr.

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} + \frac{f(x_1)}{x_1 - x_0}$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + \frac{f(x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

(Dokaz leme možete pogledati u udžbeniku na strani 121)

Podeljene razlike; Njutnov interpolacioni polinom sa podeljenim razlikama

Osobine podeljenih razlika:

1. $\left(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2\right)\left[x_0, x_1, \ldots, x_n\right] = \alpha_1 f_1\left[x_0, x_1, \ldots, x_n\right] + \alpha_2 f_2\left[x_0, x_1, \ldots, x_n\right]$

2. Podeljena razlika je simetrična funkcija čvorova, što znači da redosled čvorova nije bitan

Oblik Njutnovog polinoma:

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + a_n(x - x_0)\ldots(x - x_{n-1})$$

<u>Teorema 1.:</u> Neka je funkcija $f:[a,b] \to \mathbf{R}$ definisana na segmentu $[a,b]$ i neka su $x_0, x_1, \ldots, x_n$ različite tačke segmenta $[a,b]$. Polinom $P_n(x)$ stepena n kojim se funkcija f interpolira u čvorovima x_i, $i = 0,1,\ldots,n$ je

$$P_n(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + \cdots + f[x_0, x_1, \ldots, x_n](x - x_0)\ldots(x - x_{n-1})$$

Podeljene razlike; Njutnov interpolacioni polinom sa podeljenim razlikama

Dokaz: Razmotrimo grešku interpolacije Lagranžovim interpolacionim polinomom stepena k, tj. razmotrimo razliku

$$f(x)-P_k(x)=f(x)-\omega_{k+1}(x)\sum_{i=0}^{k}\frac{f(x_i)}{(x-x_i)\prod\limits_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{k}(x_i-x_j)}=\omega_{k+1}(x)\left(\frac{f(x)}{\prod\limits_{j=0}^{k}(x-x_j)}+\sum_{i=0}^{k}\frac{f(x_i)}{(x_i-x)\prod\limits_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{k}(x_i-x_j)}\right)=$$

$$=\omega_{k+1}(x)f[x,x_0,x_1,\ldots,x_k] \qquad (1)$$

Razlika $P_{k+1}(x)-P_k(x)$ je polinom stepena $k+1$, čije su nule čvorovi $x_0,x_1,\ldots,x_k$ jer je $P_{k+1}(x_j)=P_k(x_j)=f(x_j), \quad j=0,1,\ldots,k$.

Zbog toga je

$$P_{k+1}(x)-P_k(x)=a_{k+1}\omega_{k+1}(x) \qquad (2)$$

Ako poslednju jednakost napišemo za $x=x_{k+1}$ i uzmemo u obzir da je $P_{k+1}(x_{k+1})=f(x_{k+1})$ dobićemo

$$f(x_{k+1})-P_k(x_{k+1})=a_{k+1}\omega_{k+1}(x_{k+1})$$

Poredeći ovu jednakost sa (1), za $x=x_{k+1}$, dobijamo

Podeljene razlike; Njutnov interpolacioni polinom sa podeljenim razlikama

$$a_{k+1} = f[x_0, x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}] \tag{3}$$

Iz (2) i (3) sledi da je

$$P_{k+1}(x) - P_k(x) = f[x_0, x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}]\omega_{k+1}(x)$$

Iz jednakosti

$$P_n(x) = P_0(x) + (P_1(x) - P_0(x)) + (P_2(x) - P_1(x)) + \cdots + (P_n(x) - P_{n-1}(x))$$

sledi da je

$$P_n(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + \cdots + f[x_0, \ldots, x_n](x - x_0)\ldots(x - x_{n-1})$$

6.4 OCENA GREŠKE POLINOMSKE INTERPOLACIJE

$$f(x) - P_n(x) = f[x, x_0, x_1, \dots, x_n]\omega_{n+1}(x) \qquad \text{(T1)}$$

Teorema 2.: Neka segment $[a,b]$ sadrži svih $n+1$ čvorova interpolacije $x_0, \dots, x_n$. Neka je, dalje, $f \in C^{n+1}[a,b]$. Tada za proizvoljno $x \in [a,b]$ postoji $\xi_x \in (a,b)$ takvo da je

$$f(x) - P_n(x) = \omega_{n+1}(x)\frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}$$

Ocena greške polinomske interpolacije

Dokaz: Neka je $\hat{x}$ proizvoljan, ali fiksiran element $[a,b]$ i

$$g(x) = f(x) - P_n(x) + K(x-x_0)\dots(x-x_n)$$

gde je K konstanta određena tako da je $g(\hat{x}) = 0$. Za tako izabranu konstantu K funkcija g ima $n+2$ nule $x_0, x_1, \dots, x_n, \hat{x}$ na segmentu $[a,b]$.

Rolova teorema nam daje:

- $g'(x)$ ima bar $n+1$ nulu na segmentu $[a,b]$
- $g''(x)$ ima bar $n+2$ nule na segmentu $[a,b]$

⋮

- $g^{(n+1)}(x)$ ima bar jednu nulu na segmentu $[a,b]$

Postoji $\xi_{\hat{x}} \in (a,b)$ takvo da je $g^{(n+1)}(\xi_{\hat{x}}) = 0$ tj. $g^{(n+1)}(\xi_{\hat{x}}) = f^{(n+1)}(\xi_{\hat{x}}) + K(n+1)! = 0,$

odakle je

$$K = -\frac{f^{(n+1)}(\xi_{\hat{x}})}{(n+1)!}$$

za neko $\xi_{\hat{x}} \in (a,b)$. Iz prethodnog sledi da je

$$f(\hat{x}) - P_n(\hat{x}) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_{\hat{x}})}{(n+1)!}\omega_{n+1}(\hat{x}).$$

ПИТАЊА:

1. Дефинисати подељене разлике првог, другог и k – тог реда у чвору x_i.
2. Изразити $f[x_0,x_1,x_2,x_3]$ преко вредности функције у чворовима.
3. Како гласи Њутнов интерполациони полином за нееквидистантне чворове?
4. Навести главне извођења формуле за Њутнов интерполациони полином за нееквидистантне чворове.

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
ФАКУЛТЕТ ОРГАНИЗАЦИОНИХ НАУКА