УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
ФАКУЛТЕТ ОРГАНИЗАЦИОНИХ НАУКА

Numerička analiza

Радна недеља	Тематска целина		Циљ
12	**Апроксимација функција**		Упознавање са и овладавање проблема апроксимације функција
	Тематска јединица	Метода најмањих квадрата	Студент ће бити способан да укаже на проблем апроксимације функција, као и да објасни и примени методу најмањих квадрата на конкретном примеру.
		Апроксимација полиномима	Студент ће бити способан да укаже на апроксимацију полиномима уз извођење одговарајућих система нормалних једначина.
		Преодређени системи линеарних	Студент ће бити способан да препозна преодређене системе и

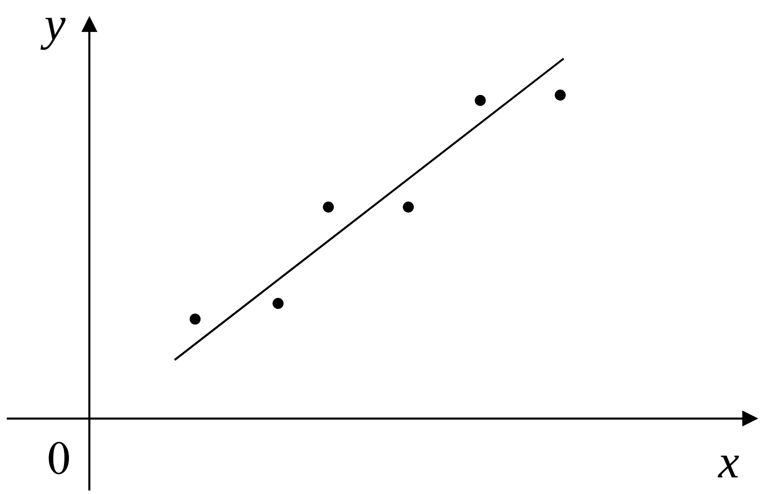
Радна недеља	Тематска јединица	ЦИЉ УЧЕЊА
12	Метода најмањих квадрата	Студент ће бити способан да укаже на проблем апроксимације функција, као и да објасни и примени методу најмањих квадрата на конкретном примеру.
12	Апроксимација полинома	Студент ће бити способан да укаже на апроксимацију полинома уз извођење одговарајућих система нормалних једначина.
12	Преодређени системи линеарних једначина	Студент ће бити способан да препозна преодређене системе и да на њима примени методу најмањих квадрата како би их решио.

НАСТАВНИ МЕТОД:
Предавање

7.1 METODA NAJMANJIH KVADRATA

$y = f(x):$

x	x_0	x_1	...	x_n
$f(x)$	y_0	y_1	...	y_n



Aproksimaciona funkcija:

$$\Phi(x) = \Phi(x; a_0, \ldots, a_m)$$

Odstupanje Φ od vrednosti u tabeli meri se normom

$$E_p(a_0, \ldots, a_m) = \left\| (y_0, \ldots, y_n) - (\Phi(x_0; a_0, \ldots, a_m), \ldots, \Phi(x_n; a_0, \ldots, a_m)) \right\|_p,$$

$$p \in [1, +\infty)$$

Metoda najmanjih kvadrata

$$p=1: \qquad E_1(a_0,\dots,a_m)=\sum_{k=0}^{n}\left|y_k-\Phi(x_k;a_0,\dots,a_m)\right|$$

(nije pogodno zbog nediferencijabilnosti E_1)

Za $p=2$ koristi se

$$E_2(a_0,\dots,a_m)=\sum_{k=0}^{n}\left(y_k-\Phi(x_k;a_0,\dots,a_m)\right)^2$$

(funkcija kvadratnog odstupanja – nije norma !)

Metoda u kojoj se aproksimacioni parametri $a_0,\dots,a_m$ određuju iz uslova da vrednost funkcije E_2 bude minimalna naziva se **metoda najmanjih kvadrata (MNK)** .

Neophodan (i dovoljan) uslov minimuma:

$$\frac{\partial E_2}{\partial a_k}=0, \quad k=0,\dots,m.$$

Opšti slučaj linearne aproksimacije:

$$\Phi(x;a_0,\dots,a_m)=a_0\Phi_0(x)+a_1\Phi_1(x)+\cdots+a_m\Phi_m(x)$$

$\Phi_0(x),\dots,\ \Phi_m(x)$ - unapred zadane funkcije

Metoda najmanjih kvadrata

Neka je

$$\delta(x) = f(x) - \Phi(x; a_0, \ldots, a_m)$$

Tada je

$$E_2(a_0, \ldots, a_m) = \sum_{j=0}^{n} \left[\delta(x_j)\right]^2,$$

$$\delta(x_j) = f(x_j) - a_0\Phi_0(x_j) - a_1\Phi_1(x_j) - \cdots - a_m\Phi_m(x_j).$$

$$\frac{\partial E_2}{\partial a_k} = 2\sum_{j=0}^{n} \delta(x_j)\frac{\partial \delta(x_j)}{\partial a_k} = -2\sum_{j=0}^{n} \delta(x_j)\Phi_k(x_j) =$$

$$= -2\sum_{j=0}^{n} (y_j - \sum_{l=0}^{m} a_l \Phi_l(x_j))\Phi_k(x_j) = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{\sum_{l=0}^{m}\left(\sum_{j=0}^{n} \Phi_k(x_j)\Phi_l(x_j)\right) a_l = \sum_{j=0}^{n} \Phi_k(x_j) y_j, \quad k = 0, \ldots, m.}$$

(sistem normalnih jednačina)

Matrični zapis sistema:

$$\boxed{A^T A a = A^T y,}$$

$$A = \begin{pmatrix} \Phi_0(x_0) & \cdots & \Phi_m(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \Phi_0(x_n) & \cdots & \Phi_m(x_n) \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Rešenje sistema:

$$a = (A^T A)^{-1} A^T y$$

7.2. APROKSIMACIJA POLINOMIMA

$\Phi_k(x) = x^k, \quad k = 0, \ldots, m:$

$$\Phi(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m$$

U ovom slučaju je:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^{\ 2} & \cdots & x_0^{\ m} \\ 1 & x_1 & x_1^{\ 2} & \cdots & x_1^{\ m} \\ \vdots & & & & \\ 1 & x_n & x_n^{\ 2} & \cdots & x_n^{\ m} \end{pmatrix}.$$

Aproksimacija polinomima

Sistem normalnih jednačina $A^T Aa = A^T y$ ima oblik

$$
\begin{aligned}
&a_0(n+1) + a_1\sum_{i=0}^{n} x_i + \cdots + a_m \sum_{i=0}^{n} x_i^m = \sum_{i=0}^{n} y_i \\
&a_0\sum_{i=0}^{n} x_i + a_1\sum_{i=0}^{n} x_i^2 + \cdots + a_m \sum_{i=0}^{n} x_i^{m+1} = \sum_{i=0}^{n} x_i y_i \\
&\vdots \\
&a_0\sum_{i=0}^{n} x_i^m + a_1\sum_{i=0}^{n} x_i^{m+1} + \cdots + a_m \sum_{i=0}^{n} x_i^{2m} = \sum_{i=0}^{n} x_i^m y_i
\end{aligned}
$$

Specijalno, ako je

$$\Phi(x) = a_0 + a_1 x,$$

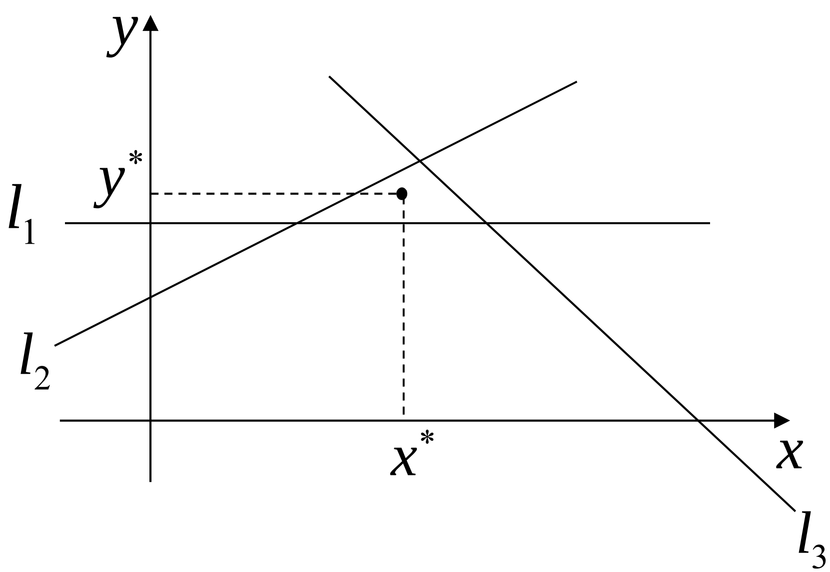
sistem glasi:

$$
\begin{aligned}
&a_0(n+1) + a_1\sum_{i=0}^{n} x_i = \sum_{i=0}^{n} y_i \\
&a_0\sum_{i=0}^{n} x_i + a_1\sum_{i=0}^{n} x_i^2 = \sum_{i=0}^{n} x_i y_i
\end{aligned}
$$

7.3. PREODREĐENI SISTEM LINEARNIH ALGEBARSKIH JEDNAČINA

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \qquad (1)$$

Sistem (1) ne mora biti saglasan.



$$\begin{aligned} l_1: &\quad a_1x + b_1y = c_1 \\ l_2: &\quad a_2x + b_2y = c_2 \\ l_3: &\quad a_3x + b_3y = c_3 \end{aligned}$$

Preodređeni sistem linearnih algebarskih jednačina

Funkcija odstupanja: $$F(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}-b_i\right)^2$$

Približno rešenje sistema (1) je tačka u kojoj funkcija F dostiže minimum, tj. određuje se iz uslova da je

$$\frac{\partial F}{\partial x_k}=0,\quad (k=1,\ldots,n)$$

ПИТАЊА:

1. Из ког услова се изводе апроксимациони параметри у методи најмањих квадрата?
2. Који је облик апроксимационе функције у општем случају линеарне апроксимације?
3. Како се долази до система нормалних једначина у општем случају линеарне апроксимације?
4. Написати систем нормалних једначина у матричном облику.
5. Написати систем нормалних једначина ако је апроксимациона функција облика $\Phi(x) = a_0 + a_1 x$.
6. Дефинисати функцију одступања за преодређени систем линеарних једначина. Који су услови за одређивање минимума те функције?

ФОН

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
ФАКУЛТЕТ ОРГАНИЗАЦИОНИХ НАУКА