ФОН

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
ФАКУЛТЕТ ОРГАНИЗАЦИОНИХ НАУКА

Numerička analiza

Радна недеља	Тематска целина		Циљ
14	**Нумеричко диференцирање и нумеричка интеграција**		Упознавање са и овладавање проблема нумеричког диференцирања и интеграције
	Тематска јединица	Трапезна формула	Студент ће бити способан да изведе формулу трапеза уз оцену грешке и исту примени на решавање проблема интеграције..
		Симпсонова формула	Студент ће бити способан да изведе формулу Симпсона уз оцену грешке и исту примени на решавање проблема интеграције..

Numerička analiza

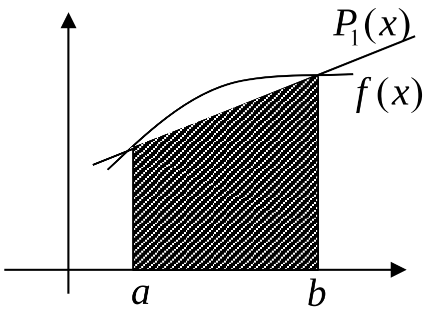
Радна недеља	Тематска јединица	ЦИЉ УЧЕЊА
14	Трапезна формула	Студент ће бити способан да изведе формулу трапеза уз оцену грешке и исту примени на решавање проблема интеграције..
14	Симпсонова формула	Студент ће бити способан да изведе формулу Симпсона уз оцену грешке и исту примени на решавање проблема интеграције..

НАСТАВНИ МЕТОД:
Предавање

Trapezna formula

8.4. Trapezna formula

$$n=1: \qquad f(x)= f(a)+(x-a)\,f[a,b]+(x-a)(x-b)\frac{f''(\xi_x)}{2!}$$



$$\int_a^b f(x)dx = \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)+\int_a^b (x-a)(x-b)\frac{f''(\xi_x)}{2}dx$$

$$\boxed{Q_1(f)\equiv \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)}$$ trapezno pravilo

Teorema(o oceni greške): Neka je $f:[a,b]\to \mathbf{R}$ dva puta neprekidno diferencijabilna funkcija na $[a,b]$. Tada postoji $\eta\in[a,b]$ takvo da je

$$E_1(f) = -\frac{(b-a)^3}{12}f''(\eta)$$

Dokaz:

$$E_1(f)= f''(\eta)\int_a^b (x-a)(x-b)dx = -\frac{(b-a)^3}{12}f''(\eta)$$

Trapezna formula; Simpsonova formula

Neka je: $h = \dfrac{b-a}{m}, \quad x_k = a + kh, \quad (k = 0,1,\dots,m)$. Tada je

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{m-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx = \sum_{k=0}^{m-1}\left[\frac{h}{2}\left(f(x_k)+f(x_{k+1}) - \frac{h^3}{12}f''(\eta_k)\right)\right] = \frac{h}{2}\left[f(x_0)+f(x_m)+2\sum_{k=1}^{m-1}f(x_k)\right] - \frac{h^3}{12}\sum_{k=0}^{m-1}f''(\eta_k)$$

$$\boxed{I_1(f) = \frac{b-a}{2m}\left(f(x_0)+f(x_m)+2\sum_{k=1}^{m-1}f(x_k)\right)}$$

uopštena trapezna formula

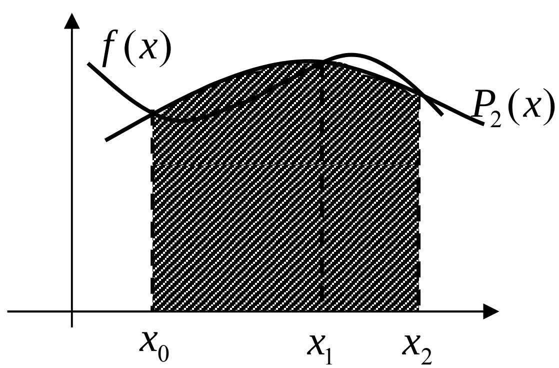
Greška:

$$E_T(f) = -\frac{(b-a)^3}{12m^3}\sum_{k=0}^{m-1}f''(\eta_k) = -\frac{(b-a)^3}{12m^3}f''(\eta)\sum_{k=0}^{m-1}1 = -\frac{(b-a)^3}{12m^2}f''(\eta)$$

8.5. Simpsonova formula

$$n = 2: \quad x_0 = a, \quad x_1 = \frac{a+b}{2}, \quad x_2 = b$$

$$\int_a^b f(x)dx = A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + E_2(f)$$



Simpsonova formula

$E_2(x^k)=0, \quad k=0,1,2:$

$$\int_a^b dx = A_0 + A_1 + A_2$$

$$\int_a^b x\,dx = A_0 a + A_1 \frac{a+b}{2} + A_2 b$$

$$\int_a^b x^2 dx = A_0 a^2 + A_1 \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + A_2 b^2$$

$$\left.\begin{aligned} &A_0 + A_1 + A_2 = b-a \\ &aA_0 + \frac{a+b}{2}A_1 + bA_2 = \frac{b^2-a^2}{2} \\ &a^2 A_0 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 A_1 + b^2 A_2 = \frac{b^3-a^3}{3} \end{aligned}\right\}$$

$$A_0 = \frac{b-a}{6}, \quad A_1 = \frac{2(b-a)}{3}, \quad A_2 = \frac{b-a}{6}$$

$$\boxed{Q_2(f) = S(f) \equiv \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)}$$

Simpsonovo pravilo

Simpsonova formula

Teorema (o oceni greške): Neka je f četiri puta neprekidno diferencijabilna funkcija na $[a,b]$. Tada postoji $\eta \in [a,b]$ takvo da je

$$E_2(f) = -\frac{f^{(4)}(\eta)(b-a)^5}{2880}$$

Dokaz: Lako se dokazuje da Simpsonova formula ima algebarski stepen tačnosti tri, tj. da je

$$I(P_3) = S(P_3)$$

Neka je P_3 polinom trećeg stepena za koji je

$$P_3(x_0) = f(x_0),\ P_3(x_1) = f(x_1),\ P_3(x_2) = f(x_2),\ P_3'(x_1) = f'(x_1).$$

Dokazuje se da je

$$f(x) - P_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi_x)}{4!}(x-x_0)(x-x_1)^2(x-x_2), \quad \xi \in (a,b)$$

Tada je

$$E_s(f) = I(f) - S(f) = I(f) - I(P_3) = \int_{x_0}^{x_2} [f(x) - P_3(x)]dx =$$

$$= \int_{x_0}^{x_2} \frac{f^{(4)}(\xi_x)}{4!}(x-x_0)(x-x_1)^2(x-x_2)dx = \frac{f^{(4)}(\eta)}{4!}\int_{x_0}^{x_2}(x-x_0)(x-x_1)^2(x-x_2)dx \qquad (*)$$

Simpsonova formula

Odaberimo $f(x) = \bar{f}(x) = (x - x_1)^4$. Tada je

$$I(\bar{f}) = \int_{x_0}^{x_2} (x - x_1)^4 dx = \left. \frac{(x - x_1)^5}{5} \right|_{x_0}^{x_2} = \frac{(x_2 - x_1)^5}{5} - \frac{(x_0 - x_1)^5}{5} = \frac{h^5}{5} - \frac{(-h)^5}{5} = \frac{2h^5}{5}$$

$$S(\bar{f}) = \frac{2h}{6}(h^4 + 0 + h^4) = \frac{2h^5}{3}$$

$$\bar{f}^{(4)} = 4!$$

Uvrštavanjem u (*) dobijamo

$$\frac{2h^5}{5} - \frac{2h^5}{3} = \frac{4!}{4!} \int_{x_0}^{x_2} (x - x_0)(x - x_1)^2 (x - x_2) dx, \quad \text{tj.}$$

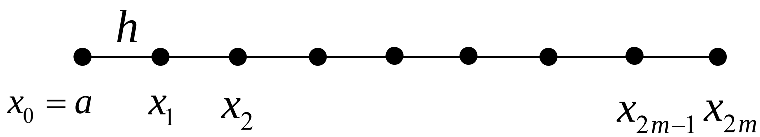
$$\int_{x_0}^{x_2} (x - x_0)(x - x_1)^2 (x - x_2) dx = -\frac{2h^5}{15}$$

Prema tome je

$$E_S(f) = \frac{f^{(4)}(\eta)}{4!} \cdot \left(-\frac{4h^5}{15} \right) = -\frac{4}{15} \cdot \frac{f^{(4)}(\eta)}{4!} \cdot \left(\frac{b - a}{2} \right)^5 = -\frac{f^{(4)}(\eta)(b - a)^5}{2880}$$

Simpsonova formula

Uopštena Simpsonova formula



$$h = \frac{b-a}{2m}: \quad x_k = x_0 + kh, \quad k = 0, \dots, 2m.$$

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{m-1} \int_{x_{2k}}^{x_{2k+2}} f(x)dx = \sum_{k=0}^{m-1} \left\{ \frac{2h}{6} \left[f\left(x_{2k}\right) + 4f\left(x_{2k+1}\right) + f\left(x_{2k+2}\right) \right] - \frac{f^{(4)}(\eta_k)}{2880}(2h)^5 \right\} =$$

$$= \frac{h}{3} \left[f(x_0) + f(x_{2n}) + 4\sum_{k=0}^{m-1} f(x_{2k+1}) + 2\sum_{k=1}^{m-1} f(x_{2k}) \right] - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(4)}(\eta_k)}{2880} 2^5 h^5$$

$$\boxed{S_n(f) = \frac{h}{3} \left[f(x_0) + f(x_{2n}) + 4\sum_{k=0}^{m-1} f(x_{2k+1}) + 2\sum_{k=1}^{m-1} f(x_{2k}) \right]}$$

$$E_{S_n}(f) = -\frac{2^5}{2880} \left(\frac{b-a}{2m} \right)^5 \sum_{k=0}^{m-1} 1 \cdot f^{(4)}(\eta_k) = -\frac{(b-a)^5}{2880m^5} \cdot f^{(4)}(\eta) \cdot m =$$

$$= -\frac{(b-a)^5}{2880m^4} \cdot f^{(4)}(\eta), \quad \eta \in [a,b].$$

ПИТАЊА:

1. Чиме се апроксимира подинтегрална функција код трапезног правила?
2. Навести трапезно правило и дати геометријску интерпретацију правила.
3. Формулисати и доказати теорему о оцени грешке код трапезног правила.
4. Како гласи уопштено трапезно правило? Навести формулу за оцену грешке тог правила.
5. Чиме се апроксимира подинтегрална функција код Симпсоновог правила?
6. Који је алгебарски степен тачности Симпсонове формуле?
7. Навести Симпсоново правило.
8. Навести основне елементе доказа о оцени грешке Симпсоновог правила.
9. Како гласи уопштена Симпсонова формула? Навести формулу за оцену грешке те формуле.

ФОН

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
ФАКУЛТЕТ ОРГАНИЗАЦИОНИХ НАУКА