УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
ФАКУЛТЕТ ОРГАНИЗАЦИОНИХ НАУКА

# Numerička analiza

<table>
<tr><th>Радна недеља</th><th colspan="2">Тематска целина</th><th>Циљ</th></tr>
<tr><td rowspan="4">13</td><td colspan="2">Нумеричко диференцирање и нумеричка интеграција</td><td>Упознавање са и овладавање проблема нумеричког диференцирања и интеграције</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Тематска јединица</td><td>Нумеричко диференцирање</td><td>Студент ће бити способан да изведе формуле за нумеричко диференцирање функције.</td></tr>
<tr><td>Нумеричка интеграција</td><td>Студент ће бити способан да укаже и препозна проблем нумеричке интеграције и да дефинише алгебарски степен тачности квадратурне формуле.</td></tr>
<tr><td>Формуле правоугаоника</td><td>Студент ће бити способан да изведе формуле правоугаоника уз оцену грешке и исту примени на решавање проблема</td></tr>
</table>

# Numerička analiza

| Радна недеља | Тематска јединица | ЦИЉ УЧЕЊА |
|---|---|---|
| 13 | Нумеричко диференцирање | Студент ће бити способан да изведе формуле за нумеричко диференцирање функције. |
| 13 | Нумеричка интеграција | Студент ће бити способан да укаже и препозна проблем нумеричке интеграције и да дефинише алгебарски степен тачности квадратурне формуле. |
| 13 | Формуле правоугаоника | Студент ће бити способан да изведе формуле правоугаоника уз оцену грешке и исту примени на решавање проблема интеграције. |

**НАСТАВНИ МЕТОД:**
**Предавање**

# Numeričko diferenciranje

## 8.1. Numeričko diferenciranje

Neka $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \subset [a,b], \quad f \in C^{(n+1)}[a,b]$

LIP: $$f(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) L_k(x) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi(x))$$

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) L_k'(x) + \frac{d}{dx}\left(\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)}{(n+1)!}\right) f^{(n+1)}(\xi(x)) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)}{(n+1)!} \frac{d}{dx} f^{(n+1)}(\xi(x))$$

$x = x_k$ :

$$f'(x_k) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j) L_j'(x_k) + \frac{f^{(n+1)}(\xi(x_k))}{(n+1)!} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} (x_k - x_j)$$

$n = 2$ :

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}, \; L_0'(x) = \frac{2x - x_1 - x_2}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}, \; L_1'(x) = \frac{2x - x_0 - x_2}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}, \; L_2'(x) = \frac{2x - x_0 - x_1}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

$$f'(x_k) = f(x_0)\frac{2x_k - x_1 - x_2}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + f(x_1)\frac{2x_k - x_0 - x_2}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + f(x_2)\frac{2x_k - x_0 - x_1}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} + \frac{1}{6} f'''(\xi_k) \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{2} (x_k - x_j), (k = 0,1,2)$$

# Numeričko diferenciranje; Numerička integracija

Ekvidistantni čvorovi: $x_1 = x_0 + h,\ x_2 = x_0 + 2h$

$$f'(x_0) = \frac{1}{h}\left(-\frac{3}{2}f(x_0) + 2f(x_1) - \frac{1}{2}f(x_2)\right) + \frac{h^2}{3}f'''(\xi_0)$$

$$f'(x_1) = \frac{1}{h}\left(-\frac{1}{2}f(x_0) + \frac{1}{2}f(x_2)\right) - \frac{h^2}{6}f'''(\xi_1)$$

$$f'(x_2) = \frac{1}{h}\left(\frac{1}{2}f(x_0) - 2f(x_1) + \frac{3}{2}f(x_2)\right) - \frac{h^2}{3}f'''(\xi_2)$$

## 8.2. Numerička integracija

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx$$

$f \approx g:$ $\quad I(f) \sim I(g)$ ( kvadraturna formula )

Interpolacione kvadraturne formule: $f(x) \approx P_n(x)$

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j)L_j(x)$$

$$I(P_n) = \int_a^b f(x_j)\int_a^b L_j(x)dx = \sum_{j=0}^{n} f(x_j)A_j$$

# Numerička integracija

$$A_j = \int_a^b L_j(x)dx, \quad (j = 0,...,n)$$ - težinski koeficijenti

$x_0, x_1, ..., x_n$ - čvorovi interpolacije

$x_0 = a$ i $x_n = b$ - kvadraturna formula je zatvorenog tipa

**Greška kvadraturne formule**:

$$E_n(f) = \int_a^b f(x)dx - \sum_{j=0}^{n} A_j f(x_j)$$

**Definicija**: Kvadraturna formula je **algebarskog stepena tačnosti *m*** ako je

$$E_n(x^k) = 0, \quad k \in \{0,1,...,m\}$$

$$E_n(x^{m+1}) \neq 0$$

1) Ako su čvorovi $x_0, x_1, ..., x_n$ unapred poznati i fiksirani, koeficijenti $A_0, ..., A_n$ se određuju iz uslova da je

$$E_n(x^k) = 0, \quad k = 0,1,...,n.$$

Ovo su kvadraturne formule **Njutn – Kotesovog** tipa.

2) Ako su $x_0, x_1, \ldots, x_n;\ A_0, \ldots, A_n$ nepoznati, onda se određuju iz uslova

$$E_n(x^k) = 0, \qquad k = 0, 1, \ldots, 2n+1.$$

U pitanju su **Gausove kvadraturne formule**.

Za ocenu greške koriste se:

**Teorema 1.** Neka je $f:[a,b] \to \mathbf{R}$ neprekidna funkcija i neka su $a_j,\ (j = 0, \ldots, n)$ istog znaka. Ako $t_j \in [a,b],\ \ j = 0, \ldots, n$, onda postoji $\eta \in [a,b]$ takvo da je

$$\sum_{j=0}^{n} a_j f(t_j) = f(\eta) \sum_{j=0}^{n} a_j$$

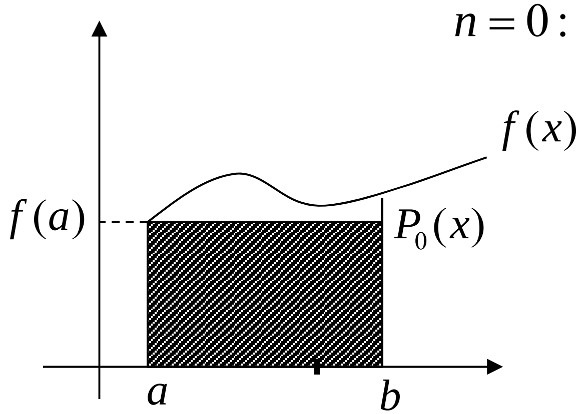
**Teorema 2.** Neka je $f:[a,b] \to \mathbf{R}$ neprekidna funkcija i neka je $g:[a,b] \to \mathbf{R}$ stalnog znaka na $[a,b]$. Tada postoji $\xi \in [a,b]$ takvo da je

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx$$

# Formula pravougaonika

## 8.3. Formula pravugaonika

$$n=0: \quad f(x)=f(a)+(x-a)f'(\xi_x), \quad \xi\in(a,b)$$




$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(a)+\int_a^b (x-a)f'(\xi_x)dx \approx (b-a)f(a)$$

$$\boxed{Q_0(f)\equiv f(a)(b-a)}$$ pravilo pravugaonika

**Teorema** (o oceni greške): Ako je $f:[a,b]$neprekidno diferencijabilna funkcija, onda postoji $\eta\in[a,b]$ takvo da je

$$E_0(f)=\frac{(b-a)^2}{2}f'(\eta)$$

**Dokaz:**

$$E_0(f)=\int_a^b (x-a)f'(\xi_x)dx = f'(\eta)\int_a^b (x-a)dx = f'(\eta)\frac{(b-a)^2}{2}.$$

# Formula pravougaonika

Uobičajeno je da se interval integracije podeli na više ( jednakih ) delova:

$$x_k = a + kh; \quad (k = 0,1,\ldots,m); \quad h = \frac{b-a}{m}$$

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{m-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx = \sum_{k=0}^{m-1} f(x_k)(x_{k+1}-x_k) + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(x_{k+1}-x_k)^2}{2} f'(\eta_k) = h\sum_{k=0}^{m} f(x_k) + \frac{h^2}{2}\sum_{k=0}^{m-1} f'(\eta_k)$$

$$= \frac{b-a}{m}\sum_{k=0}^{m-1} f(x_k) + \frac{(b-a)^2}{2m^2}\sum_{k=0}^{m-1} f'(\eta_k)$$

$$\boxed{I_1(f) = \frac{b-a}{m}\left(f(x_0) + f(x_1) + \cdots + f(x_{m-1})\right)}$$

uopštena formula pravougaonika

Greška:

$$E_1(f) = \frac{(b-a)^2}{2m^2} f'(\eta)\sum_{k=0}^{m-1} 1 = \frac{(b-a)^2}{2m} f'(\eta), \quad \eta \in [a,b]$$

ПИТАЊА:

1. Шта се подразумева под нумеричким диференцирањем?
2. Шта се подразумева под нумеричком интеграцијом?
3. Шта су квадратурне формуле? Каква је структура интерполационе квадратурне формуле?
4. Дефинисати алгебарски степен тачности квадратурне формуле.
5. Шта су квадратурне формуле Њутн – Котесовог типа?
6. Чиме се апроксимира подинтегрална функција код правила правоугаоника?
7. Навести правило правоугаоника и дати геометријску интерпретацију правила.
8. Формулисати и доказати теорему о оцени грешке код правила правоугаоника.
9. Како гласи уопштена формула правоугаоника? Навести формулу за оцену грешке те формуле.

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
ФАКУЛТЕТ ОРГАНИЗАЦИОНИХ НАУКА