УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
ФАКУЛТЕТ ОРГАНИЗАЦИОНИХ НАУКА

Numerička analiza

<table>
<tr><th>Радна недеља</th><th colspan="2">Тематска целина</th><th>Циљ</th></tr>
<tr><td rowspan="5">15</td><td colspan="2">Обичне диференцијалне једначине</td><td>Овладавање проблема ОДЈ и њихово решавања одговарајућом методом</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Тематска јединица</td><td>Пикарова метода</td><td>Студент ће бити способан да примени Пикарову методу на решавања ОДЈ.</td></tr>
<tr><td>Тејлорова метода</td><td>Студент ће бити способан да примени Тејлорову методу на решавања ОДЈ.</td></tr>
<tr><td>Ојлерова метода</td><td>Студент ће бити способан да примени Ојлерову методу на решавања ОДЈ.</td></tr>
<tr><td>Методе Рунге - Кута</td><td>Студент ће бити способан да примени методу Рунге-Кута на решавања ОДЈ.</td></tr>
</table>

Numerička analiza

Радна недеља	Тематска јединица	ЦИЉ УЧЕЊА
15	Пикарова метода	Студент ће бити способан да примени Пикарову методу на решавања ОДЈ.
15	Тејлорова метода	Студент ће бити способан да примени Тејлорову методу на решавања ОДЈ.
15	Ојлерова метода	Студент ће бити способан да примени Ојлерову методу на решавања ОДЈ.
15	Методе Рунге - Кута	Студент ће бити способан да примени методу Рунге-Кута на решавања ОДЈ.

НАСТАВНИ МЕТОД:
Предавање

Pikarova metoda

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad y(x_0) = y_0$$ - Košijev problem (1)

Teorema (o jedinstvenosti rešenja Košijevog problema): Neka je funkcija $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ neprekidna u oblasti $\mathbf{D} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \| x - x_0| < a, |y - y_0| < b\}$ gde su a, $b>0$. Dalje, neka su ispunjeni uslovi:

a) $(\exists M > 0)(\forall (x, y) \in \mathbf{D}) \, |f(x, y)| \le M$,

b) $(\exists L \ge 0)(\forall (x, y_1), (x, y_2) \in \mathbf{D}) |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le L |y_1 - y_2|$

Tada postoji tačno jedno rešenje Košijevog problema (1) koje je definisano i neprekidno za sve $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$, pri čemu je $h = \min\left\{a, \dfrac{b}{M}\right\}$.

9.1. PIKAROVA METODA

Spada u analitičke metode nalaženja približnog rešenja Košijevog problema (1). Diferencijalna jednačina se zamenjuje ekvivalentnom integralnom jednačinom

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t)) dt$$

Pikarova metoda

Poslednja jednačina je oblika

$$y(x) = \Phi(y(x)), \qquad (2)$$

pa se za njeno rešavanje može primeniti metoda uzastopnih aproksimacija.

$$y^{[0]}(x) = y_0, \quad y^{[n+1]}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y^{[n]}(t))dt, \; n = 0,1,2,\ldots$$

$\{y^{[n]}\}$- niz rešenja jednačine (2) za koji se može pokazati da konvergira ka rešenju Košijevog problema.

Teorema (o oceni greške): Neka su ispunjeni uslovi teoreme o jednistvenosti rešenja Košijevog problema. Neka je $y(x)$ rešenje Košijevog poblema i neka je niz $\{y^{[n]}(x)\}$ definisan formulom

$$y^{[0]}(x) = y_0, \quad y^{[k+1]}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y^{[k]}(t))dt, \quad k = 0,1,2,\ldots$$

Tada za svako $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$ važi:

$$\left|y^{[n]}(x) - y(x)\right| \le ML^n \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!}, \; n = 0,1,2,\ldots$$

9.2. TEJLOROVA METODA

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad y(x_0) = y_0$$ - Košijev problem (1)

Ideja metode je da se primeni Tejlorov razvoj na rešenje diferencijalne jednačine (1) u okolini neke izabrane tačke.

Neka je $\{x_n\}$ niz tačaka definisan sa $x_n = x_0 + nh$, pri čemu je h>0. Tada primenom Tejlorove formule dobijamo

$$y(x_{n+1}) = y(x_n + h) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2!} y''(x_n) + \cdots + \frac{h^p}{p!} y^{(p)}(x_n) + \frac{y^{(p+1)}(\xi)}{(p+1)!} h^{p+1}$$

Uvodimo oznake

$$y'(x) = f(x, y) = f^{(0)}(x, y)$$

$$y''(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) y'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) f(x, y) = f^{(1)}(x, y)$$

$$\vdots$$

tj. u opštem slučaju

$$y^{(k+1)}(x) = f^{(k)}(x, y) = \frac{\partial f^{(k-1)}}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f^{(k-1)}}{\partial y}(x, y) f(x, y), \quad k = 0,1,2,\ldots$$

Neka $y(x_{n+1})$ označava vrednost rešenja y u tački x_{n+1}, a y_{n+1} neka označava aproksimaciju te vrednosti Tejlorovim polinomom u okolini tačke x_n. Tada je

$$y_{n+1} = y_n + hf^{(0)}(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2!} f^{(1)}(x_n, y_n) + \cdots + \frac{h^p}{p!} f^{(p-1)}(x_n, y_n) \qquad (2)$$

Ojlerova metoda

Tejlorova metoda reda p sastoji se u primeni prethodne aproksimacije. Ako se uvede oznaka

$$T_p(x,y) = f(x,y) + \frac{h}{2!} f^{(1)}(x,y) + \cdots + \frac{h^{p-1}}{p!} f^{(p-1)}(x,y)$$

onda se relacija (2) može napisati u obliku

$$y_{n+1} = y_n + hT_p(x_n, y_n).$$

Izborom vrednosti za p dobijaju se različite numeričke metode za rešavanje Košijevog problema.

9.3. OJLEROVA METODA

Ova metoda je specijalan slučaj Tejlorove metode kada je p=1, tj. $T_1(x,y) = f(x,y).$
Neka je niz tačaka $\{x_n\}$ definisan tačkom x_0 i korakom h na sledeći način:

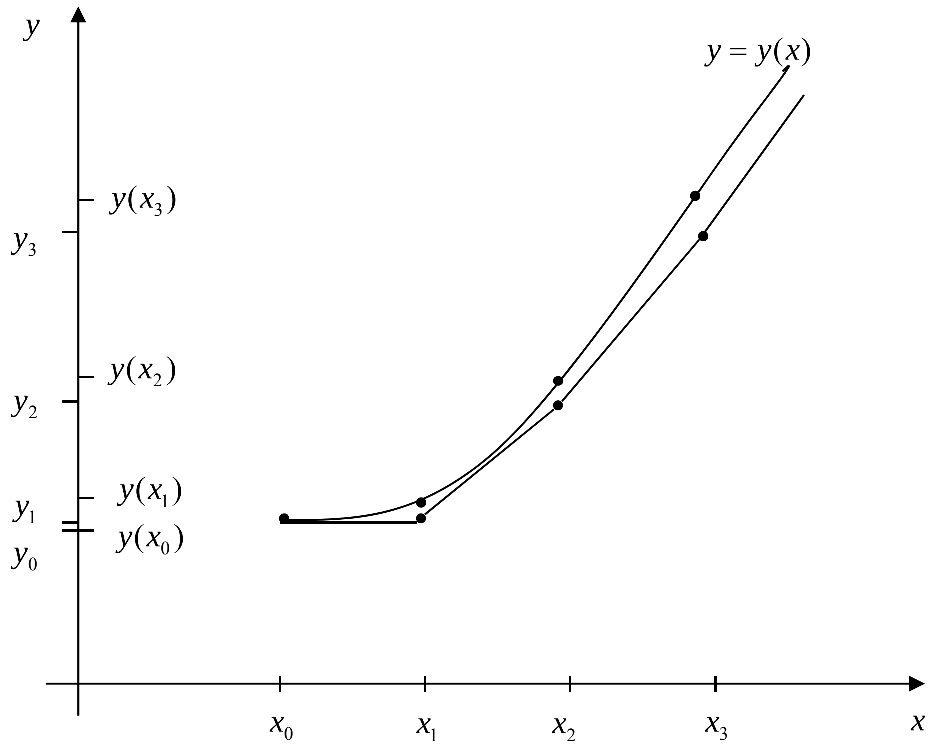
$$x_n = x_0 + nh, \quad n = 0,1,...$$

Primenom Tejlorove metode, polazeći od početnog uslova $y(x_0) = y_0$, možemo formirati niz $\{y_n\}$ na sledeći način:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n), \quad n = 0,1,2,...$$

Ojlerova metoda

Grafička interpretacija



Greška metode na jednom koraku je oblika

$$E = \frac{y''(c)}{2!} h^2 = O(h^2)$$

9.4. METODE RUNGE – KUTA

Ideja ovih metoda je da se u Tejlorovoj metodi izraz $hT_p(x_n, y_n)$ zameni jednostavnijim tj. vrednost y_{n+1} se izračunava po formuli

$$y_{n+1} = y_n + \sum_{i=1}^{r} \alpha_i K_i^{(n)}, \qquad (1)$$

pri čemu je

$$K_1^{(n)} = hf(x_n, y_n)$$
$$K_2^{(n)} = hf(x_n + a_2 h, y_n + b_{21} K_1^{(n)}),$$
$$\vdots$$
$$K_i^{(n)} = hf(x_n + a_i h, y_n + \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} K_j^{(n)}), \quad i = 1,2,\ldots,r$$

Neodređeni koeficijenti α_i, a_i, b_{ij} se određuju iz jednakosti

$$hT_p(x_n, y_n) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i K_i^{(n)} \qquad (2)$$

tj. iz jednačina koji se dobija izjednačavanjem koeficijenata uz iste stepene h na levoj i desnoj strani.

Izborom p odnosno r dobijaju se metode Runge – Kuta različitog reda.

Metode Runge - Kuta

- Metoda Runge – Kuta 2. reda

Dobija se za $p=2$ i $r=2$. Prema (1) je

$$y_{n+1} = y_n + \alpha_1 K_1^{(n)} + \alpha_2 K_2^{(n)}$$

pri čemu je $K_1^{(n)} = hf(x_n, y_n)$, $\quad K_2^{(n)} = hf(x_n + a_2 h, y_n + b_{21} K_1)$.

Razvijanjem $K_2^{(n)}$ i primenom Tejlorove formule dobija se

$$K_2^{(n)} = hf(x_n, y_n) + h^2\left(a_2 f_x'(x_n, y_n) + b_{21} f_y'(x_n, y_n) f(x_n, y_n)\right) + O(h^3)$$

tj.

$$y_{n+1} = y_n + h(\alpha_1 + \alpha_2) f(x_n, y_n) + h^2 \alpha_2 \left(a_2 f_x'(x_n, y_n) + b_{21} f_y'(x_n, y_n) f(x_n, y_n)\right)$$

Iz prethodne relacije i (2), izjednačavanjem odgovarajućih koeficijenata uz h^k, dobija se sistem jednačina

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 &= 1 \\ \alpha_2 a_2 &= 0.5 \\ \alpha_2 b_{21} &= 0.5 \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Sistem (3) sastoji se iz tri jednačine sa četiri nepoznate tako da ima beskonačno rešenja. Neka od njih su:

Metode Runge - Kuta

a) $\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 1, \quad a_2 = b_{21} = 0.5$

Tada (1) ima oblik

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} f(x_n, y_n)), \quad n = 0,1,2,...$$

Ova metoda je poznata kao **modifikovana Ojlerova metoda**.

b) $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5, \quad a_2 = b_{21} = 1$

Tada (1) ima oblik

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f(x_n, y_n) + f(x_n + h, y_n + hf(x_n, y_n))), \quad n = 0,1,2,...$$

Ova metoda je poznata kao **poboljšana Ojlerova metoda**.

Greška na jednom koraku kod ovih metoda je $E = O(h^3)$.

Metode Runge - Kuta

- Medtoda Runge – Kuta 4. reda

Dobija se za p=4 i r=4 tako da je

$$y_{n+1} = y_n + \alpha_1 K_1^{(n)} + \alpha_2 K_2^{(n)} + \alpha_3 K_3^{(n)} + \alpha_4 K_4^{(n)}$$

pri čemu je

$$\begin{aligned}
K_1^{(n)} &= hf(x_n, y_n), \\
K_2^{(n)} &= hf(x_n + a_2 h, y_n + b_{21} K_1^{(n)}), \\
K_3^{(n)} &= hf(x_n + a_3 h, y_n + b_{31} K_1^{(n)} + b_{32} K_2^{(n)}), \\
K_4^{(n)} &= hf(x_n + a_4 h, y_n + b_{41} K_1^{(n)} + b_{42} K_2^{(n)} + b_{43} K_3^{(n)})
\end{aligned}$$

Slično kao kod metode drugog reda dobija se sistem jednačina po neodređenim koeficijentima koji ima beskonačno mnogo rešenja.

Standardna metoda Runge – Kuta četvrtog reda dobija se za

$$\alpha_1 = \alpha_4 = \frac{1}{6}, \alpha_2 = \alpha_3 = \frac{1}{3}, a_2 = a_3 = \frac{1}{2}, a_4 = 1, b_{21} = b_{32} = \frac{1}{2}, b_{31} = b_{41} = b_{42} = 0, b_{43} = 1$$

pa je

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}\left(K_1^{(n)} + 2K_2^{(n)} + 2K_3^{(n)} + K_4^{(n)}\right), \quad n = 0,1,\ldots$$

Metode Runge - Kuta

gde je

$$K_1^{(n)} = hf(x_n, y_n),$$

$$K_2^{(n)} = hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{K_1^{(n)}}{2}),$$

$$K_3^{(n)} = hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{K_2^{(n)}}{2}),$$

$$K_4^{(n)} = hf(x_n + h, y_n + K_3^{(n)})$$

Greška metode na svakom koraku je $E = O(h^5)$.

ПИТАЊА:

1. Дефинисати Кошијев проблем за диференцијалну једначину првог реда.
2. Која је разлика између аналитичких и нумеричких метода за решавање Кошијевог проблема?
3. Како се дефинише низ узастопних апроксимација Пикарове методе?
4. Извести формулу за приближно решење Кошијевог проблема Тејлоровом методом.
5. Извести формулу за приближно решење Кошијевог проблема Ојлеровом методом.
6. Извести формулу за приближно решење Кошијевог проблема за методу Рунге – Кута другог реда.

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
ФАКУЛТЕТ ОРГАНИЗАЦИОНИХ НАУКА