# Математика 3 - вежбе

ФОН
УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
ФАКУЛТЕТ ОРГАНИЗАЦИОНИХ НАУКА

Небојша Николић

# Линеарне нехомогене ДЈ с константним коефицијентима - метода неодређених коефицијената

## ЛИНЕАРНЕ НЕХОМОГЕНЕ ЈЕДНАЧИНЕ С КОНСТАНТНИМ КОЕФИЦИЈЕНТИМА – МЕТОДА НЕОДРЕЂЕНИХ КОЕФИЦИЈЕНАТА –

Једначина $a_0y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\dots+a_{n-1}y'+a_ny=f(x)$ је лин. нех. јед. с конст. коефицијентима.
Једначина $a_0y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\dots+a_{n-1}y'+a_ny=0$ је, њој одговарајућа, хомогена једначина.
Ако је $y_H=C_1y_1+\dots+C_ny_n$ решење одговарајуће хомогене ј-не и $y_p$ произвољно, партикуларно решење полазне нехомогене ј-не, тада је $y=y_H+y_p=C_1y_1+\dots+C_ny_n+y_p$ опште решење полазне ј-не. С обзиром да смо научили да нађемо $y_H$, проблем се своди на налажење једног решења $y_p$ полазне, нехомогене ј-не.
Ако је ф-ја са десне стране облика $f(x)=e^{ax}\cdot[P_{m_1}(x)\cdot\cos bx+Q_{m_2}(x)\sin bx]$ ($P_{m_1}(x)$ и $Q_{m_2}(x)$ су полиноми степена $m_1$ и $m_2$), тада је $y_p=x^k\cdot e^{ax}[P_m^*(x)\cdot\cos bx+Q_m^*(x)\sin bx]$, где је $m=\max\{m_1,m_2\}$, $P_m^*$ и $Q_m^*$ полиноми истог степена са неодређеним коефицијентима и $k$ вишеструкост корена $a+bi$ (или $a-bi$) у карактеристичној једначини $a_0\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\dots+a_{n-1}\lambda+a_n=0$.

# Линеарне нехомогене ДЈ с константним коефицијентима - метода неодређених коефицијената

НАПОМЕНА 1: Ако је $f(x)=P_{m_1}(x)\cdot\cos bx+Q_{m_2}(x)\sin bx$, што значи да је $a=0$, та је $y_p=x^k\cdot[P_m^*(x)\cos bx+Q_m^*(x)\sin bx]$, где је $k$ вишеструкост корена $bi$ (или $-bi$) у карактерист. ј-ни.

НАПОМЕНА 2: Ако је $f(x)=e^{ax}\cdot P_m(x)$, што значи да је $b=0$, та је $y_p=x^k\cdot e^{ax}\cdot P_m^*(x)$, где је $k$ вишеструкост корена $a$ у карактеристичној ј-ни.

НАПОМЕНА 3: Ако је $f(x)=P_m(x)$, што значи да је $a=b=0$, та је $y_p=x^k\cdot P_m^*(x)$, где је $k$ вишеструкост корена $0$ у карактеристичној ј-ни.

НАПОМЕНА 4: Ако $a+bi$ није решење карактеристичне ј-не, што значи да је $k=0$, тј. $x^k=1$. Полином $P_m^*(x)$, са неодређеним коеф., је на пример $P_m^*(x)=A_0x^m+A_1x^{m-1}+\dots+A_{m-1}x+A_m$. Тако је $P_0^*(x)=A$, $P_1^*(x)=Ax+B$, $P_2^*(x)=Ax^2+Bx+C$ итд.

ЗАДАТАК 13. Решити диф. ј-ну $y''-2y'+2y=e^x\cdot(2\cos x-4x\cdot\sin x)$

Решење: $\lambda^2-2\lambda+2=0$ је карактеристична ј-на, а $\lambda_{1,2}=1\pm i$ су њена решења. То значи да је $y_1=e^{1x}\cdot\cos 1\cdot x$, $y_2=e^{1x}\cdot\sin 1x \Rightarrow y_H=C_1e^x\cos x+C_2e^x\sin x$ је решење одговарајуће хомогене ј-не.

# Линеарне нехомогене ДЈ с константним коефицијентима - метода неодређених коефицијената

Сада тражимо једно решење $y_p$ полазне нехомогене ј-не. С обзиром да је $f(x)=e^x(2\cdot\cos x-4x\cdot\sin x)$, и да $a+bi=1+1\cdot i$ јесте (једнострукo) решење карак. ј-не, имаћемо :

$y_p=x^1\cdot e^x\cdot[(Ax+B)\cos x+(Cx+D)\sin x]$ (полиноми су 1. степена јер је 2 полином 0-тог и $-4x$ полином 1. ст.).

Коефицијенте A, B, C и D добијамо тако што $y_p$, $y_p'$ и $y_p''$ заменимо у полазну ј-ну. Када

$y_p=e^x[(Ax^2+Bx)\cos x+(Cx^2+Dx)\sin x]$, $y_p'=e^x\cdot[((A+C)x^2+(2A+B+D)x+B)\cos x+((C-A)x^2+(D-B+2C)x+D)\sin x]$ и

$y_p''=e^x[(2Cx^2+(4A+4C+2D)x+(2A+2B+2D))\cdot\cos x+(-2Ax^2+(-4A-2B+4C)x+(2D-2B+2C))\cdot\sin x]$ заменимо у полазну ј-ну, после скраћивања, добићемо: $\cancel{e^x}[(4Cx+(2A+2D))\cdot\cos x+(-4Ax+(2C-2B))\cdot\sin x]=\cancel{e^x}(2\cos x-4x\sin x)$.

Последња једнакост је могућа ако и само ако је: $4Cx+(2A+2D)=2$ (уз $\cos x$) и $-4Ax+(2C-2B)=-4x$ (уз $\sin x$). Пошто су два полинома једнака ако и само ако су им једнаки коефицијенти уз исте степене $(x^0,x^1,\dots)$, из прве једнакости имамо $\left.\begin{matrix}4C=0\\2A+2D=2\end{matrix}\right\}$, а из друге $\left.\begin{matrix}-4A=-4\\2C-2B=0\end{matrix}\right\}$. Лако се налази решење овог система: $A=1$, $B=C=D=0$. Враћањем у $y_p$ добијамо да је $y_p=xe^x[(1\cdot x+0)\cos x+(0x+0)\sin x]$, тј. $y_p=x^2e^x\cos x$. На крају, опште решење полазне нехомогене једначине је $y=y_H+y_p=C_1e^x\cos x+C_2e^x\sin x+x^2e^x\cos x$, тј.

$$\underline{y=e^x\cdot[(C_1+x^2)\cos x+C_2\sin x]}.$$

# Линеарне нехомогене ДЈ с константним коефицијентима - метода неодређених коефицијената

Задатак 14. Решити диф. једначину $y''+y'=4x^2e^x$.

Решење: Решења карактеристичне ј-не $\lambda^2+\lambda=0$ су $\lambda_1=0$, $\lambda_2=-1$, па је $y_H=C_1e^{0x}+C_2e^{-1x}=C_1+C_2e^{-x}$.

За ф-ју $f(x)=e^x\cdot 4x^2$ је $a=1$, $b=0$, па $a+bi=1$ није корен карактеристичне ј-не ($x^k=x^0=1$). То значи да је једно решење полазне нехомогене ј-не, облика $y_P=e^x\cdot(Ax^2+Bx+C)$, јер је $4x^2$ полин. другог степена. Константе $A$, $B$ и $C$ налазимо тако што $y_P$, $y_P'=e^x(Ax^2+(2A+B)x+(B+C))$ и $y_P''=e^x(Ax^2+(4A+B)x+(2A+2B+C))$ заменимо у полазну једначину. Након замене имаћемо:

$$e^x(2Ax^2+(6A+2B)x+(2A+3B+2C))=4x^2e^x \Rightarrow \left(\begin{array}{c}\text{изједначавамо}\\ \text{одгов. коефиц.}\end{array}\right) \Rightarrow \left.\begin{array}{l}2A=4\\ 6A+2B=0\\ 2A+3B+2C=0\end{array}\right\}.$$

Решење последњег линеарног система је $A=2$, $B=-6$ и $C=7$, па је $y_P=e^x(2x^2-6x+7)$. На крају налазимо опште решење полазне нехомогене ј-не: $y=y_H+y_P=\underline{C_1+C_2e^{-x}+e^x(2x^2-6x+7)}$.

Задатак 15. Решити диф. једначину $y'''-y''=12x^2+6x$.

Решење: Решења карактеристичне ј-не $\lambda^3-\lambda^2=0$ су $\lambda_{1,2}=0$ и $\lambda_3=1$, па је $y_H=C_1+C_2\cdot x+C_3\cdot e^x$.

За ф-ју $f(x)=12x^2+6x$ је $a=b=0$ (напомена 3) и $a+bi=0$ јесте корен карактеристичне ј-не, вишеструкости 2, тј. $k=2$. То значи да је $y_p=x^2(Ax^2+Bx+C)$. Константе $A, B$ и $C$ налазимо тако што $y_p=Ax^4+Bx^3+Cx^2$, $y_p'=4Ax^3+3Bx^2+2Cx$, $y_p''=12Ax^2+6Bx+2C$ и $y_p'''=24Ax+6B$ заменимо у полазну ј-ну. Добићемо $(24Ax+6B)-(12Ax^2+6Bx+2C)=12x^2+6x \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -12Ax^2+(24A-6B)x+(6B-2C)=12x^2+6x \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -12A=12 \\ 24A-6B=6 \\ 6B-2C=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \ldots \Rightarrow A=-1,\ B=-5 \text{ и } C=-15.$$

То значи да је $y_p=x^2(-x^2-5x-15)=-x^2(x^2+5x+15) \Rightarrow y=y_H+y_p=\underline{C_1+C_2x+C_3e^{x}-x^2(x^2+5x+15)}$.

НАПОМЕНА: Нека је $a_0y^{(n)}+\ldots+a_ny=f_1(x)+\ldots+f_m(x)$, и свака од ф-ја $f_1(x),\ldots,f_m(x)$ облика $e^{ax}\cdot[P_{m_1}(x)\cos bx+Q_{m_2}(x)\cdot\sin bx]$. Нека је $y_H$ решење одговарајуће хомогене ј-не и $y_{p_1},\ldots,y_{p_m}$ партикуларна решења, редом, једначина $a_0y^{(n)}+\ldots+a_ny=f_1(x)$, $\ldots$, $a_0y^{(n)}+\ldots+a_ny=f_m(x)$. Тада је опште решење полазне нехомогене ј-не $y=y_H+y_{p_1}+\ldots+y_{p_m}$ (ПРИНЦИП СУПЕРПОЗИЦИЈЕ).

ЗАДАТАК 16. Решити диф. једначину $y''+y'=x^2-e^{-x}+e^{x}$.

Решење: Решења карактеристичне ј-не $\lambda^2+\lambda=0$ су $\lambda_1=0$, $\lambda_2=-1$, па је $y_H=C_1+C_2e^{-x}$.

# Линеарне нехомогене ДЈ с константним коефицијентима - метода неодређених коефицијената

За ј-ну $y''+y'=x^2$ је $y_{P_1}=x^1\cdot(Ax^2+Bx+C)$, јер је $a+bi=0+0i=0$ корен вишеструкости 1, карактеристичне ј-не. Добићемо $(6Ax+2B)+(3Ax^2+2Bx+C)=x^2 \Leftrightarrow 3Ax^2+(6A+2B)x+(2B+C)=x^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3A=1 \\ 6A+2B=0 \\ 2B+C=0 \end{cases} \Rightarrow \ldots \Rightarrow A=\frac{1}{3},\ B=-1,\ C=2,\ \text{односно } y_{P_1}=x\left(\frac{1}{3}x^2-x+2\right).$$

За ј-ну $y''+y'=-e^{-x}$ је $y_{P_2}=x^1\cdot e^{-x}\cdot D$, јер је $a+bi=-1+0i=-1$ корен вишеструкости 1, карактеристичне ј-не. Добићемо $(Dx-2D)e^{-x}+(D-Dx)e^{-x}=-e^{-x} \Leftrightarrow -D=-1 \Leftrightarrow D=1$, па је $y_{P_2}=x\cdot e^{-x}$.

За ј-ну $y''+y'=e^x$ је $y_{P_3}=e^x\cdot E$, јер $a+bi=1+0i=1$ није корен карактеристичне ј-не.
Заменом добијамо $Ee^x+Ee^x=e^x \Leftrightarrow 2E=1 \Leftrightarrow E=\frac{1}{2}$, односно $y_{P_3}=\frac{1}{2}e^x$.

На крају је $y=y_H+y_{P_1}+y_{P_2}+y_{P_3} \Rightarrow \underline{y=C_1+C_2e^{-x}+x\left(\frac{1}{3}x^2-x+2\right)+xe^{-x}+\frac{1}{2}e^x}$.

ЗАДАТАК ЗА САМОСТАЛНИ РАД: Решити диф. једначину $y'''-y''+y'-y=\cos x+2e^x$.

Резултат: Добићемо $y_H=C_1e^x+C_2\cos x+C_3\sin x$, $y_{P_1}=x\cdot\left(-\frac{1}{4}\cos x-\frac{1}{4}\sin x\right)$, $y_{P_2}=x\cdot e^x \Rightarrow$

$$\Rightarrow y=y_H+y_{P_1}+y_{P_2}=\underline{C_1e^x+C_2\cos x+C_3\sin x-\frac{x}{4}(\cos x+\sin x)+xe^x}.$$

НАПОМЕНА: За $f_1(x)=\cos x=1\cdot\cos x+0\cdot\sin x$, узимамо $y_{P_1}=x^1(A\cos x+B\sin x)$ ($a+bi=0+1i=i$ јесте корен).

# Линеарне нехомогене ДЈ с константним коефицијентима - метода варијације константи

## ЛИНЕАРНЕ НЕХОМОГЕНЕ ЈЕДНАЧИНЕ С КОНСТАНТНИМ КОЕФИЦИЈЕНТИМА
## –МЕТОДА ВАРИЈАЦИЈЕ КОНСТАНТИ–

Видели смо да методом неодређених коефицијената можемо да решимо нехомогену линеарну диф. ј-ну с константним коефицијентима $a_0y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\dots+a_{n-1}y'+a_ny=f(x)$, у случају када је $f(x)$ одређеног облика $f(x)=e^{ax}\cdot[P_{m_1}(x)\cdot\cos bx+Q_{m_2}(x)\sin bx]$. Методом варијације константи решавамо исту ј-ну, али за произвољну ф-ју $f(x)$:

Ако је $y_H=C_1y_1+\dots+C_ny_n$ решење одговарајуће хомогене ј-не, тада је решење полазне нехомогене ј-не $y=C_1(x)\cdot y_1+\dots+C_n(x)\cdot y_n$ (константе смо „варирали" у ф-је). Изводе непознатих ф-ја $C_1(x),\dots,C_n(x)$ добијамо из система:

$$\left.\begin{array}{l} C_1'y_1+\dots+C_n'y_n=0 \\ C_1'y_1'+\dots+C_n'y_n'=0 \\ \vdots \\ C_1'y_1^{(n-1)}+\dots+C_n'y_n^{(n-1)}=f(x) \end{array}\right\}$$

, а одатле, интеграљењем добијамо ф-је $C_1(x),\dots,C_n(x)$, а самим тим и опште решење дате ј-не: $y=C_1(x)\cdot y_1+\dots+C_n(x)\cdot y_n$.

ЗАДАТАК 17. Решити диф. једначину $y''+6y'+9y=e^{-3x}\cdot\ln x$.

Решење: Корени карактеристичне ј-не $\lambda^2+6\lambda+9=0$ су $\lambda_{1,2}=-3$, одакле добијамо $y_H=C_1\cdot e^{-3x}+C_2\cdot xe^{-3x}$ ($y_1=e^{-3x}$ и $y_2=xe^{-3x}$). Решење полазне, нехомогене ј-не, је $y=C_1(x)\cdot e^{-3x}+C_2(x)\cdot xe^{-3x}$. Још је потребно да нађемо непознате ф-је $C_1(x)$ и $C_2(x)$. Изводе тих ф-ја добијамо из система $\left.\begin{array}{l}C_1'y_1+C_2'y_2=0\\ C_1'y_1'+C_2'y_2'=f(x)\end{array}\right\}$, тј:

$$\left.\begin{array}{l} C_1'\cdot e^{-3x}+C_2'\cdot xe^{-3x}=0\\ C_1'\cdot(-3e^{-3x})+C_2'\cdot(1-3x)e^{-3x}=e^{-3x}\ln x\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} C_1'+x\cdot C_2'=0\\ -3C_1'+(1-3x)C_2'=\ln x\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}C_1'+x\cdot C_2'=0\\ 1\cdot C_2'=\ln x\end{array}\right\}$$

Знači, решење датог система је: $C_2'(x)=\ln x$ и $C_1'(x)=-x\ln x$. Интеграљењем добијамо: $C_2(x)=\int \ln x\,dx=\ldots=x(\ln x-1)+D_2$ и $C_1(x)=-\int x\ln x\,dx=\ldots=\frac{x^2}{4}(1-2\ln x)+D_1$ (оба интеграла се решавају парцијалном интеграцијом; нове конст. смо назвали $D_1$ и $D_2$). Враћањем добијених ф-ја у $y=C_1(x)e^{-3x}+C_2(x)\cdot xe^{-3x}$ добијамо тражено опште решење полазне нехомогене ј-не: $y=\left[\frac{x^2}{4}(1-2\ln x)+D_1\right]e^{-3x}+\left[x(\ln x-1)+D_2\right]\cdot xe^{-3x}$.

ЗАДАТАК 18. Решити диф. једначину $y'''+y'=\sin x+\frac{1}{\sin x}$.

Решење: Корени карактеристичне ј-не $\lambda^3+\lambda=0$ су $\lambda_1=0$ и $\lambda_{2,3}=\pm i$ $\Rightarrow y_1=e^{0x}=1$, $y_2=\cos 1\cdot x$, $y_3=\sin 1\cdot x$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow y_H=C_1\cdot 1+C_2\cdot\cos x+C_3\cdot\sin x$ је решење одговарајуће хомогене ј-не.

# Линеарне нехомогене ДЈ с константним коефицијентима - метода варијације константи

Решење полазне нехомогене ј-не је облика $y=C_1(x)\cdot 1+C_2(x)\cdot\cos x+C_3(x)\cdot\sin x$. Изводе ф-ја $C_1(x), C_2(x)$ и $C_3(x)$ налазимо из система:

$$\left.\begin{aligned} C_1'\cdot 1+C_2'\cdot\cos x+C_3'\cdot\sin x&=0\\ C_2'\cdot(-\sin x)+C_3'\cdot\cos x&=0\\ C_2'\cdot(-\cos x)+C_3'\cdot(-\sin x)&=\sin x+\frac{1}{\sin x}\end{aligned}\right\}\cdot\frac{-\cos x}{\sin x},\ + \Rightarrow \left\{\begin{aligned} C_1'+\cos x\cdot C_2'+\sin x\cdot C_3'&=0\\ -\sin x\cdot C_2'+\cos x\cdot C_3'&=0\\ \left(-\frac{\cos^2x}{\sin x}-\sin x\right)\cdot C_3'&=\frac{\sin^2x+1}{\sin x}\end{aligned}\right.$$

Из 3. ј-не добијамо $C_3'(x)=-\sin^2x-1$, из 2. ј-не $C_2'(x)=-\sin x\cos x-\frac{\cos x}{\sin x}$ и из 1. ј-не добијамо $C_1'(x)=\sin x+\frac{1}{\sin x}$.

Сада је $C_3(x)=\int(-\sin^2x-1)dx=\int\left(\frac{\cos2x-1}{2}-1\right)dx=\frac{1}{2}\int\cos2x\,dx-\frac{3}{2}\int dx=\frac{\sin2x}{4}-\frac{3}{2}x+D_3$. Слично је

$C_2(x)=\int\left(-\sin x\cos x-\frac{\cos x}{\sin x}\right)dx=(\sin x=t)=-\int t\,dt-\int\frac{dt}{t}=-\frac{t^2}{2}-\ln|t|+D_2=-\frac{\sin^2x}{2}-\ln|\sin x|+D_2$, и

$C_1(x)=\int\left(\sin x+\frac{1}{\sin x}\right)dx=\int\sin x\,dx+\int\frac{dx}{\sin x}=\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t\right)=-\cos x+\int\frac{dt}{t}=-\cos x+\ln|t|+D_1=-\cos x+\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+D_1$.

Из $y=C_1(x)+C_2(x)\cos x+C_3(x)\sin x$ добијамо опште решење дате нехомогене ј-не:

$$y=\left[D_1-\cos x+\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|\right]+\left[D_2-\frac{\sin^2x}{2}-\ln|\sin x|\right]\cdot\cos x+\left[D_3-\frac{3x}{2}+\frac{\sin2x}{4}\right]\cdot\sin x.$$

ЗАДАТАК ЗА САМОСТАЛНИ РАД: Решити диф. једначину $y^{(4)}-y'''+y''-y'=\sin x+\cos x$.

Резултат: $y_H=C_1+C_2e^x+C_3\cos x+C_4\sin x$, $C_1(x)=-\int(\sin x+\cos x)dx=\cos x-\sin x+D_1$, $C_2(x)=\int\frac{\sin x+\cos x}{2}e^{-x}dx=\frac{-e^{-x}\cos x}{2}+D_2$,

$C_3(x)=\int\frac{1+\sin2x}{2}dx=\frac{x}{2}-\frac{\cos2x}{4}+D_3$, $C_4(x)=\int-\frac{\cos2x}{2}dx=-\frac{\sin2x}{4}+D_4\Rightarrow y=C_1(x)+C_2(x)e^x+C_3(x)\cos x+C_4(x)\sin x=\ldots$

# Математика 3 - вежбе

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
ФАКУЛТЕТ ОРГАНИЗАЦИОНИХ НАУКА

Небојша Николић