Математика 3 - вежбе

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
ФАКУЛТЕТ ОРГАНИЗАЦИОНИХ НАУКА

Небојша Николић

СИСТЕМИ ЛИНЕАРНИХ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА

ХОМОГЕНИ СИСТЕМИ ЛИНЕАРНИХ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА СА КОНСТАНТНИМ КОЕФИЦИЈЕНТИМА

$$\left.\begin{array}{l} x_1'=a_{11}(t)\cdot x_1+\dots+a_{1n}(t)\cdot x_n+b_1(t)\\ \vdots \\ x_n'=a_{n1}(t)\cdot x_1+\dots+a_{nn}(t)\cdot x_n+b_n(t)\end{array}\right\} \Leftrightarrow \frac{dX}{dt}=A(t)\cdot X+B(t)$$ је линеарни систем диф. једначина

, где је $X=X(t)=\begin{bmatrix}x_1(t)\\ \vdots \\ x_n(t)\end{bmatrix}$, $B(t)=\begin{bmatrix}b_1(t)\\ \vdots \\ b_n(t)\end{bmatrix}$ и $A(t)=\begin{bmatrix}a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t)\\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & & a_{nn}(t)\end{bmatrix}$

- Ако је $b_1(t)=\dots=b_n(t)=0$ кажемо да је систем хомоген. Ако су $a_{ij}(t)=a_{ij}=const.$, за $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,n}$, кажемо да је линеарни систем са константним коефицијентима. Дакле:

$$\left.\begin{array}{l} x_1'=a_{11}\cdot x_1+\dots+a_{1n}\cdot x_n\\ \\ x_n'=a_{n1}\cdot x_1+\dots+a_{nn}\cdot x_n\end{array}\right\} \Leftrightarrow \frac{dX}{dt}=A\cdot X$$ је хомогени линеарни систем са конст. коефицијентима.

Ако су $X_1(t)=\begin{bmatrix}x_{11}(t)\\ \vdots \\ x_{n1}(t)\end{bmatrix},\dots,X_n(t)=\begin{bmatrix}x_{1n}(t)\\ x_{nn}(t)\end{bmatrix}$ линеарно независна решења система, тада је

Хомогени системи линеарних ДЈ са константним коефицијентима

$X(t)=C_1\cdot X_1(t)+\ldots+C_n X_n(t)=F\cdot C$ опште решење система, где је $C=\begin{bmatrix}C_1\\ \vdots\\ C_n\end{bmatrix}$ и

$F=[X_1\ X_2\ldots X_n]=\begin{bmatrix}x_{11}(t)&\ldots&x_{1n}(t)\\ \vdots&&\vdots\\ x_{n1}(t)&\ldots&x_{nn}(t)\end{bmatrix}$ фундаментална матрица система.

Преостао је проблем: наћи n независних решења $X_1=X_1(t),\ldots,X_n=X_n(t)$ система, тј. F.
Нека су $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ решења карактеристичне ј-не: $\det(A-\lambda I)=0$. λ_i, $i=\overline{1,n}$ су сопствене вредности матрице A. Слично као код хомогене диф. ј-не n-тог реда са конст. коефицијентима, једно решење карактеристичне ј-не (тј. сопствена вредност) λ_i генерише једно партикуларно решење система $X_i=X_i(t)$, на следећи начин:

Ако је λ_i једнострука, реална сопствена вредност, тада је $X_i=M\cdot e^{\lambda_i t}$, где је M један сопствени вектор који одговара сопств. вр. λ_i, тј. M је решење једначине $(A-\lambda_i I)\cdot M=0$.
Ако је $\lambda_i=\lambda_{i+1}$ двострука, реална сопствена вредност, тада је $X_i=(M_1+M_2t)e^{\lambda_i t}$ и $X_{i+1}=(M_1+M_2t)e^{\lambda_i t}$, где су M_1 и M_2 решења система $(A-\lambda_i I)\cdot M_2=0$, $(A-\lambda_i I)\cdot M_1=M_2$ (два независна реш. за X_i и X_{i+1}).
Ако је λ_i једнострука, комплексна сопствена вредност и $\lambda_{i+1}=\overline{\lambda_i}$, тада је $X_{kom}=M\cdot e^{\lambda_i t}$, где је M један сопствени вектор који одговара λ_i и $X_i=Re(X_{kom})$, $X_{i+1}=Im(X_{kom})$.

1. Решити систем

$$\begin{aligned} x' &= 2x - y - z \\ y' &= 12x - 4y - 12z \\ z' &= -4x + y + 5z \, . \end{aligned}$$

Решење: Из система следи да је

$$x'' = -4x + y + 5z, \quad x''' = -16x + 5y + 17z.$$

Из прве једнакости и прве једначине система добијамо да је

$$y = -\frac{1}{4}(5x' + x'' - 6x), \quad z = \frac{1}{4}(x' + x'' + 2x), \tag{$*$}$$

па заменом у другој једнакости добијамо линеарну једначину са константним коефицијентима

$$x''' - 3x'' + 2x' = 0. \tag{$**$}$$

Карактеристична једначина ове диференцијалне једначине је $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda = 0$, па је $\lambda \in \{0, 1, 2\}$, а опште решење једначине $(**)$ је

$$x(t) = C_1 + C_2 e^t + C_3 e^{2t}, \quad C_1, C_2, C_3 \in R.$$

Из једнакости $(*)$ и једнакости

$$x' = C_1 e^t + 2C_3 e^{2t}, \quad x'' = C_2 e^t + 4C_3 e^{2t}$$

следи да је

$$y = \frac{3}{2}C_1 - 2C_3 e^{2t}, \quad z = \frac{1}{2}C_1 + C_2 e^t + 2C_3 e^{2t}.$$

Према томе,

$$x(t) = 2D_1 + D_2 e^t + D_3 e^{2t}, \quad y(t) = 3D_1 - 2C_3 e^{2t}, \quad z(t) = D_1 + D_2 e^t + 2D_3 e^{2t},$$

где је $D_1, D_2, D_3 \in R$.

Друго решење: Ако је A матрица датог система, онда из карактеристичне једначине $|A - \lambda I| = 0$ следи да је $\lambda \in \{0, 1, 2\}$.

За $\lambda = 0$ из система $AB = 0$, где је $B = (a\ b\ c)^T$, добијамо да је $a = 2\alpha$, $b = 3\alpha$ и $c = \alpha$ $(\alpha \in R)$, па за $\lambda = 1$ имамо партикуларно решење $X_1(t) = (2,\ 3,\ 1)^T$.

Слично, за $\lambda = 1$ и $\lambda = 2$ из система $(A - I)B = 0$ и $(A - 2I)B = 0$ добијамо, на пример, партикуларна решења

$$X_2(t) = (1,\ 0,\ 1)^T e^t, \quad X_3(t) = (1,\ -2,\ 2)^T e^{2t}.$$

Према томе, опште решење је

$$X(t) = (X_1(t)\ X_2(t)\ X_3(t))(D_1\ D_2\ D_3)^T = D_1 X_1(t) + D_2 X_2(t) + D_3 X_3(t).$$

2. Матричном методом решити систем

$$\begin{aligned} x' &= 3x - y + z \\ y' &= -x + 5y - z \\ z' &= x - y + 3z . \end{aligned}$$

Решење: Ако је A матрица датог система, онда је

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 5-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 11\lambda^2 + 36\lambda - 36 = p(\lambda).$$

Како је број 2 нула полинома $p(\lambda)$, дељењем $p(\lambda)$ са $\lambda - 2$ добијамо полином $\lambda^2 - 9\lambda + 18$, што значи да су сопствене вредности матрице A бројеви: 2,3 и 6. За $\lambda = 2$ сопствени вектор $(1, 0, -1)^T$ налазимо из система

$$a - b + c = 0, \quad -a + 2b - c = 0, \quad a - b + c = 0,$$

за $\lambda = 3$ сопствени вектор $(1, 1, 1)^T$ налазимо из система

$$b - c = 0, \quad a - 2b + c = 0, \quad a - b = 0,$$

а за $\lambda = 6$ сопствени вектор $(1, -2, 1)^T$ налазимо из система

$$3a + b - c = 0, \quad a + b + c = 0, \quad a - b - 3c = 0.$$

Према томе, независна партикуларна решења су

$$X_1(t) = (1\ 0\ \ -1)^T e^{2t}, \quad X_2(t) = (1\ 1\ 1)^T e^{3t}, \quad X_3(t) = (1\ \ -2\ 1)^T e^{6t},$$

а опште решење је

$$x(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t} + C_3 e^{6t}, \quad y(t) = C_2 e^{3t} - 2C_2 e^{6t}, \quad z(t) = -C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t} + C_3 e^{6t},$$

где је $C_1, C_2, C_3 \in R$.

3. Матричном методом решити систем

$$\begin{aligned} x' &= -2x - 3y + 3z \\ y' &= x + 2y - z \\ z' &= -x - y + 2z \,. \end{aligned}$$

Решење: Карактеристични полином матрице A датог система је $\lambda(\lambda-1)^2$. За $\lambda = 0$ имамо партикуларно решење $X_1 = (3\ -1\ 1)^T$, а за $\lambda = 1$ имамо партикуларна решења X_2 и X_3 која су облика $(M_1 + M_2 t)e^t$, при чему за $M_1 = (a_1\ b_1\ c_1)^T$ и $M_2 = (a_2\ b_2\ c_2)^T$ узимамо два независна решења система

$$(A - I)M_2 = 0, \quad (A - I)M_1 = M_2,$$

из којег следи да је $c_1 = a_1 + b_1$ и $a_2 = b_2 = c_2 = 0$. За $a_1 = 0$ и $b_1 = 1$ добијамо $X_2 = (0\ 1\ 1)^T e^t$, а за $a_1 = 1$ и $b_1 = 0$ добијамо $X_3 = (1\ 0\ 1)^T e^t$. Опште решење је $(x\ y\ z)^T = (X_1\ X_2\ X_3)(C_1\ C_2\ C_3)^T$, односно

$$x(t) = 3C_1 + C_3 e^t, \quad y(t) = -C_1 + C_2 e^t, \quad z(t) = C_1 + (C_2 + C_3)e^t.$$

4. Решити систем

$$\begin{aligned} x' &= x - y + z \\ y' &= x + y - z \\ z' &= -y + 2z \, . \end{aligned}$$

Решење: Карактеристични полином матрице A датог система је $(2-\lambda)(1-\lambda)^2$. За $\lambda = 2$ из система $(A-2I)(a\ b\ c)^T = 0$ добијамо да је $b = 0$ и $a = c$, па за $a = 1$ имамо партикуларно решење $X_1 = (1\ 0\ 1)^T e^{2t}$. За $\lambda = 1$ из система

$$(A-I)(a_2\ b_2\ c_2)^T = 0, \quad (A-I)(a_1\ b_1\ c_1)^T = (a_2\ b_2\ c_2)^T$$

добијамо да је $a_1 = c_1 + b_2$, $b_1 = c_1 - a_2$ и $b_2 = c_2 = a_2$. За $c_1 = 1$ и $b_2 = 0$ имамо партикуларно решење X_2, а за $c_1 = 0$ и $b_2 = 1$ партикуларно решење X_3, где је

$$X_2(t) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} t \right) e^t, \quad X_3(t) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} t \right) e^t.$$

Опште решење је $X = (X_1\ X_2\ X_3)(C_1\ C_2\ C_3)^T$, односно

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 e^t + C_2(1+t)e^t + C_3 e^{2t}, \\ y(t) &= C_1 e^t + C_2(t-1)e^t, \\ z(t) &= C_1 e^t + C_2 t e^t + C_3 e^{2t} \end{aligned}$$

5. Матричном методом решити систем

$$x' = 4x - 3y, \quad y' = 3x + 4y.$$

Решење: Из карактеристичне једначине $|A - \lambda I| = 0$, где је A матрица система, следи да је $\lambda \in \{4+3i, 4-3i\}$. За $\lambda = 4+3i$ из система $(A-(4+3i)I)B = 0$, $B = (a\ b)^T$, односно

$$3ia + 3b = 0, \quad 3a - 3ib = 0$$

добијамо комплексно решење $X_{kom}(t) = (1 \ \ -i)^T e^{(4+3i)t}$. Ако је $X_1(t) = Re(X_{kom})$ и $X_2(t) = Im(X_{kom})$, онда су X_1 и X_2 независна партикуларна решења датог система, па је опште решење $(X_1\ X_2) \cdot C$, $C = (C_1\ C_2)^T$, $C_1, C_2 \in R$ односно

$$x = (C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t)e^{4t}, \quad y = (C_1 \sin 3t - C_2 \cos 3t)e^{4t}.$$

6. Решити систем

$$x' = 2x - y + 2z, \quad y' = x + 2z, \quad z' = -2x + y - z.$$

Решење: Ако је A матрица датог система, онда је $|A - \lambda I| = (\lambda - 1)(\lambda^2 + 1)$. За $\lambda = 1$ имамо $X_1 = (0\ 2\ 1)^T e^t$, а за $\lambda = i$ имамо комплексно партикуларно решење

$$X_{kom} = \begin{pmatrix} 1+i \\ 1+i \\ -1 \end{pmatrix} e^{it} = \begin{pmatrix} \cos t - \sin t \\ \cos t - \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos t + \sin t \\ \cos t + \sin t \\ -\sin t \end{pmatrix} \cdot i.$$

Ако је $X_2 = Re(X_{kom})$ и $X_3 = Im(X_{kom})$, онда су X_1, X_2 и X_3 независна партикуларна решења, па је опште решење

$$x = (C_2 + C_3)\cos t + (-C_2 + C_3)\sin t,$$
$$y = 2C_1 e^t + (C_2 + C_3)\cos t + (-C_2 + C_3)\sin t,$$
$$z = C_1 e^t - C_2 \cos t - C_3 \sin t.$$

Хомогени системи линеарних ДЈ са константним коефицијентима

Задатак за самостални рад:

Матричном методом решити систем

$$\begin{aligned} x' &= 2x - y + z \\ y' &= x + 2y - z \\ z' &= x - y + 2z\ . \end{aligned}$$

Резултат:

$$x(t) = C_2e^{2t} + C_3e^{3t}, \quad y(t) = C_1e^{t} + C_2e^{2t}, \quad z(t) = C_1e^{t} + C_2e^{2t} + C_3e^{3t},$$

где је $C = (C_1\ C_2\ C_3)^T$ и $C_1, C_2, C_3 \in R$.

Задатак за самостални рад:

Решити систем

$$x' = 2x + y, \quad y' = x + 3y - z, \quad z' = -x + 2y + 3z.$$

Резултат:

Математика 3 - вежбе

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
ФАКУЛТЕТ ОРГАНИЗАЦИОНИХ НАУКА

Небојша Николић