Математика 3 - вежбе

ФОН

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
ФАКУЛТЕТ ОРГАНИЗАЦИОНИХ НАУКА

Небојша Николић

ФУНКЦИЈЕ КОМПЛЕКСНЕ ПРОМЕНЉИВЕ

КОМПЛЕКСНИ БРОЈЕВИ

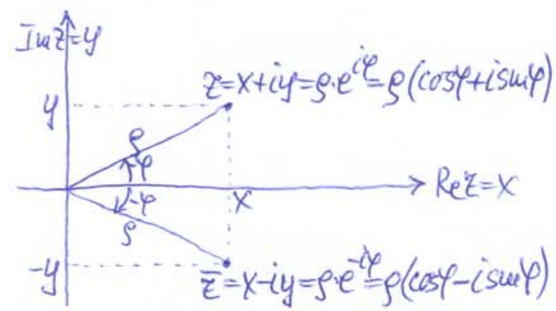
$z = x + iy \in \mathbb{C}$ – комплексан број, где је $i: i^2 = -1$ имагинарна јединица.

$x = \operatorname{Re} z$ – реални део и $y = \operatorname{Im} z$ – имагинарни део комплексног броја.

$\bar{z} = x - iy$ – одговарајући конјуговано-комплексан број $\Rightarrow x = \frac{z+\bar{z}}{2}, \; y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$.

$|z| = \sqrt{x^2+y^2}$ – модуо комплексног броја $\Rightarrow z \cdot \bar{z} = |z|^2$.

$\varphi = \arg z \in [0, 2\pi)$ – аргумент комплексног броја $\longrightarrow$



$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi$ – вишезначна вредност аргумента

$z = \rho \cdot e^{i\varphi}$ – експоненцијални облик ком. броја

$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ – тригонометријски облик, следи из експоненцијалног облика и

$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ – Ојлерова формула.

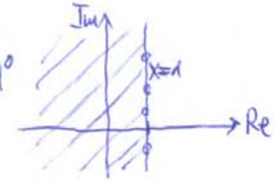
$z_1 = \rho_1 e^{i\varphi_1}, \; z_2 = \rho_2 e^{i\varphi_2} \Rightarrow z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \rho_2 \cdot e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} = \rho_1\rho_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)) \Rightarrow |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \; \operatorname{Arg}(z_1 \cdot z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2$

$z = \rho \cdot e^{i\varphi} = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) \Rightarrow z^n = \rho^n \cdot e^{in\varphi} = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$ – Моivre-ова формула

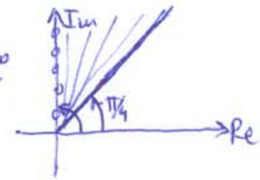
ЗАДАТАК 1. Одредити скупове тачака у комплексној равни:

1° $\operatorname{Re} z < 1$, 2° $\frac{\pi}{4} \leq \arg z < \frac{\pi}{2}$, 3° $|z-2+i| = 3$

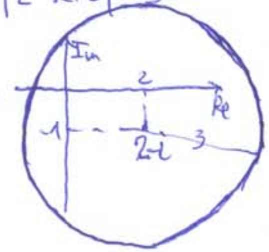
РЕШЕЊЕ: 1°



2°



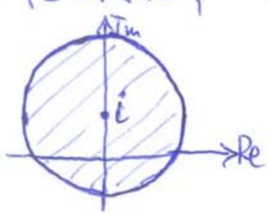
3°



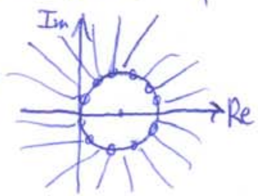
ЗАДАТАК 2. Одредити скупове тачака у комплексној равни:

1° $|z-i| \leq 2$, 2° $|z-1| > 1$, 3° $1 \leq |z-1-i| < 2$

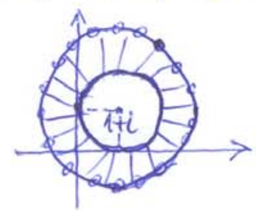
РЕШЕЊЕ: 1°



2°



3°



- НАПОМЕНА: Гранична вредност комплексног низа $z_n = x_n + i y_n$ се дефинише слично као и гр. вредност реалног низа (видети предавања). Такође, низ z_n конвергира ако и само ако конвергирају x_n и y_n, и важи $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n + i \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n$, па се израчунавање гр. вредности комплексног низа може свести на израчунавање гр. вр. реалних низова.

ЗАДАТАК 3. Испитати конвергенцију низова:

$$1^\circ\ z_n=(-1)^n+i\frac{n}{n+1},\qquad 2^\circ\ z_n=\frac{n}{n+i},\qquad 3^\circ\ z_n=1+i\frac{(-1)^n}{n^2}.$$

РЕШЕЊЕ: 1° $x_n=(-1)^n\in\{1,-1\}$ дивергира $\Rightarrow z_n$ дивергира

$$2^\circ\ z_n=\frac{n}{n+i}\cdot\frac{n-i}{n-i}=\frac{n^2}{n^2+1}-i\frac{n}{n^2+1}\Rightarrow \lim_{n\to\infty}z_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+1}-i\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1}=1-i\cdot 0=1.$$

$$3^\circ\ \lim_{n\to\infty}z_n=\lim_{n\to\infty}1+i\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=1+i\cdot 0=1.$$

ЗАДАТАК 4. Доказати да је $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n=e^z$.

РЕШЕЊЕ: Одредимо експоненцијални (или тригонометријски) облик комплексног броја $1+\frac{z}{n}$:

$$1+\frac{z}{n}=1+\frac{x+iy}{n}=\left(1+\frac{x}{n}\right)+i\cdot\frac{y}{n}=\rho\cdot e^{i\varphi},\ \text{где је } \rho=\sqrt{\left(1+\frac{x}{n}\right)^2+\left(\frac{y}{n}\right)^2},\ \operatorname{tg}\varphi=\frac{y/n}{(1+x/n)}=\frac{y}{n+x}.$$ Сада је

$$\left(1+\frac{z}{n}\right)^n=\left(\rho\cdot e^{i\varphi}\right)^n=\rho^n\cdot e^{in\varphi}:\ \lim_{n\to\infty}\rho^n=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^2+\left(\frac{y}{n}\right)^2\right]^{\frac{n}{2}}=\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{2x}{n}+\frac{x^2+y^2}{n^2}\right]^{\frac{n}{2}}=\ldots=e^x$$

$$\lim_{n\to\infty}n\varphi=\lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{tg}\varphi}{1/n}\cdot\frac{\varphi}{\operatorname{tg}\varphi}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{y}{n+x}}{\frac{1}{n}}\cdot\lim_{\varphi\to 0}\frac{\varphi}{\operatorname{tg}\varphi}=\ldots=y\cdot 1=y$$

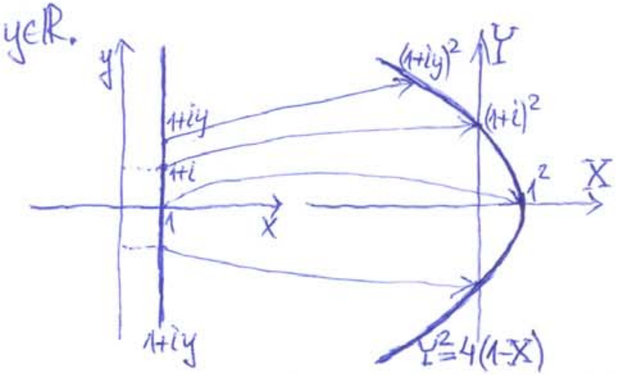
$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\rho^n\cdot e^{i\lim\limits_{n\to\infty}n\varphi}=e^x\cdot e^{iy}=e^{x+iy}=e^z$, тј. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n=e^z$, баш као и за реалне вредности z.

ФУНКЦИЈЕ КОМПЛЕКСНЕ ПРОМЕНЉИВЕ
ГРАНИЧНА ВРЕДНОСТ Ф-ЈА КОМПЛЕКСНЕ ПРОМЕНЉИВЕ

Све елементарне, реалне функције се могу проширити тако да буду дефинисане за комплексне вредности аргумента z. Тако имамо $P(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\dots+a_{n-1}z+a_n$, $a_i\in\mathbb{C}$, $z\in\mathbb{C}$ полином n-тог степена, $R(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$, $z\in\mathbb{C}$ рационалну ф-ју, $e^z=e^{x+iy}=e^x(\cos y+i\sin y)$ – експоненцијалну ф-ју, итд.

Комплексну ф-ју $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ је графички најједноставније представити као пресликавање из једне (вредност аргумента z) у другу (вредност ф-је $f(z)=w$) комплексну раван.

ЗАДАТАК 5. Функцијом $f(z)=z^2$ пресликати праву $1+iy$, $y\in\mathbb{R}$.

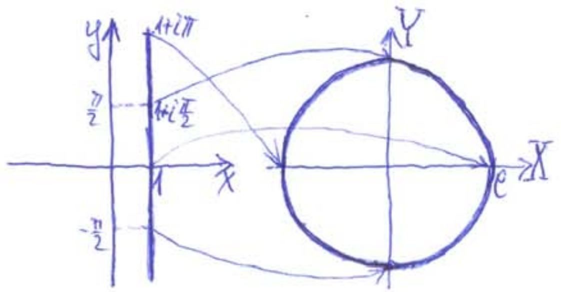


РЕШЕЊЕ: $f(1+iy)=(1+iy)^2=(1-y^2)+i\cdot 2y=X+iY$

Из $\begin{cases}1-y^2=X\\ 2y=Y\end{cases}$ добијамо $Y^2=4(1-X)$,

што представља параболу у (X,Y) равни.

ЗАДАТАК 6. Функцијом $f(z)=e^z$ пресликати праву $1+iy,\ y\in\mathbb{R}$.



РЕШЕЊЕ: $f(1+iy)=e^{1+iy}=e\cdot(\cos y+i\sin y)=e\cos y+ie\sin y=X+iY$

Из система: $\left.\begin{matrix} e\cdot\cos y=X \\ e\cdot\sin y=Y\end{matrix}\right\}$ следи $X^2+Y^2=e^2$, што представља кружницу у (X,Y) равни.

НАПОМЕНА: Из претходног задатка се може видети да је $e^1=e^{1+2\pi i}=e^{1-2\pi i}=e^{1+4\pi i}=\ldots=e$. Важи општије: $e^z=e^{z+2k\pi i},\ k\in\mathbb{Z}$, тј. бесконачно много тачака $(z, z\pm2\pi i, z\pm4\pi i,\ldots)$ се, експоненцијалном функцијом пресликава у једну тачку $e^z=w$. Вишезначна ф-ја $\operatorname{Ln} w$ се пресликава у све тачке $z, z\pm2\pi i, z\pm4\pi i,\ldots$ $\ln w$ (једнозначна ф-ја) је она грана вишезначне ф-је $\operatorname{Ln} w$ за коју је $\operatorname{Im}(\ln w)\in[0,2\pi)$.

Прецизније: $\operatorname{Ln} z=\ln|z|+i\operatorname{Arg} z,\ z\neq0$ и $\ln z=\ln|z|+i\arg z,\ z\neq0$ ($\ln(\cdot)$ са десне стране је реална логаритамска ф-ја; $\arg z\in[0,2\pi)$ је главни део аргумента $\operatorname{Arg} z=\arg z+2k\pi$)

ЗАДАТАК 7. Израчунати $\operatorname{Ln} i$, $\ln i$, $\operatorname{Ln}(1+i)$ и $\ln(1+i)$.

РЕШЕЊЕ: $\operatorname{Ln} i=\ln|i|+i\cdot\operatorname{Arg} i=\ln1+i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)=i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)\Rightarrow \ln i=i\cdot\frac{\pi}{2}$.

$Ln(1+i) = \ln|1+i| + i\,Arg(1+i) = \ln\sqrt{2} + i\cdot(\frac{\pi}{4}+2k\pi) = \frac{1}{2}\ln 2 + i(\frac{\pi}{4}+2k\pi) \Rightarrow \ln(1+i) = \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{\pi i}{4}$.

НАПОМЕНА: Општа степена ф-ја z^a, $a\in\mathbb{C}$ се дефинише са $z^a = e^{Ln z^a} = e^{a Ln z}$, $z\neq 0$, што је такође вишезначна ф-ја.

ЗАДАТАК 8. Израчунати i^i.

РЕШЕЊЕ: Користећи претходни задатак имамо: $i^i = e^{i Ln i} = e^{i\cdot i(\frac{\pi}{2}+2k\pi)} = e^{-(\frac{\pi}{2}+2k\pi)}$!

НАПОМЕНА: Хиперболичке ф-је се дефинишу исто као и у реалном случају: $sh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$, $ch z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$, док се тригонометријске ф-је морају додефинисати: $\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$, $\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$.

ЗАДАТАК 9. Доказати да је $\sin i = i\,sh 1$ и $\cos i = ch 1$.

РЕШЕЊЕ: $\sin i = \frac{e^{i\cdot i} - e^{-i\cdot i}}{2i} = \frac{e^{-1}-e^{1}}{2i} = \frac{-(e^{1}-e^{-1})}{2i}\cdot\frac{i}{i} = \frac{e^{1}-e^{-1}}{2}\cdot i = i\,sh 1$.

$\cos i = \frac{e^{i\cdot i}+e^{-i\cdot i}}{2} = \frac{e^{-1}+e^{1}}{2} = ch 1$.

Гранична вредност и непрекидност ф-ја комплексне променљиве, као и у случају низова, дефинише се аналогно са граничним вр. и непрекидности ф-је реалне променљиве.

Ако је $f(z)=u(x,y)+i\cdot v(x,y)$ и $z_0=x_0+iy_0$, $z=x+iy$, тада $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ постоји ако и само ако постоје $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y)$ и $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y)$ и важи $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y)+i\cdot\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y)$. Слично важи за непрекидност ф-је $f(z)$ у z_0 и непрекидности ф-ја $u(x,y)$ и $v(x,y)$ у (x_0,y_0).

Као и у реалном случају, елементарне комплексне ф-је су непрекидне на областима где су дефинисане. Напоменимо да $|z|$, $\bar{z}$, $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$ нису елементарне ф-је.

ЗАДАТАК 10. Испитати да ли постоји $\lim\limits_{z\to 0} f(z)$, ако је:

$$1^\circ\ f(z)=\frac{\operatorname{Re}(z^2)}{|z|^2},\quad 2^\circ\ f(z)=\frac{z^2}{|z|^2},\quad 3^\circ\ f(z)=\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}+i(1+xy),\ z=x+iy$$

РЕШЕЊЕ: 1° $f(z)=\frac{\operatorname{Re}(x+iy)^2}{x^2+y^2}=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+i\cdot 0$. Како $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} u(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ не постоји ($x=0\Rightarrow u(x,y)\xrightarrow[y\to 0]{}-1$ и $y=0\Rightarrow u(x,y)\xrightarrow[x\to 0]{}1$), не постоји ни $\lim\limits_{z\to 0} f(z)$.

2° $f(z)=\frac{(x+iy)^2}{x^2+y^2}=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+i\frac{2xy}{x^2+y^2}$; $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} u(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ не постоји $\Rightarrow \lim\limits_{z\to 0} f(z)$ не постоји.

3° $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} u(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}=0$ $\left(\left|\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right|\le |x|+|y| \xrightarrow[y\to 0]{x\to 0} 0\right)$ и $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} v(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(1+xy)=1$, па је

$\lim\limits_{z\to 0} f(z)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} u(x,y)+i\cdot\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} v(x,y)=0+i\cdot 1=i.$

ЗАДАТАК 11. Да ли постоји $\lim\limits_{z\to 1}\frac{1-\bar{z}}{1-z}$.

РЕШЕЊЕ: Нека је $w=1-z$. Тада је $\lim\limits_{z\to 1}\frac{1-\bar{z}}{1-z}=\lim\limits_{z\to 1}\frac{1-\bar{z}}{\overline{(1-\bar{z})}}=\lim\limits_{w\to 0}\frac{\bar{w}}{w}\cdot\frac{\bar{w}}{\bar{w}}=\lim\limits_{w\to 0}\frac{\bar{w}^2}{|w|^2}$, па дати лимес не постоји (претходни задатак, под 2°).

ЗАДАТАК 12. Израчунати $\lim\limits_{z\to \pi i} e^z$.

РЕШЕЊЕ: $f(z)=e^z$ је елементарна, непрекидна ф-ја, па је $\lim\limits_{z\to\pi i} f(z)=f(\pi i)=e^{\pi i}=\cos\pi+i\sin\pi=-1.$

Математика 3 - вежбе

ФОН

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
ФАКУЛТЕТ ОРГАНИЗАЦИОНИХ НАУКА

Небојша Николић