Математика 3 - вежбе

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
ФАКУЛТЕТ ОРГАНИЗАЦИОНИХ НАУКА

Небојша Николић

ПАРЦИЈАЛНЕ ДИФ. ЈЕДНАЧИНЕ ПРВОГ РЕДА

ХОМОГЕНЕ ЛИНЕАРНЕ ПАРЦИЈАЛНЕ ДИФ. ЈЕДНАЧИНЕ

$F(x_1,\dots,x_n,u,u'_{x_1},\dots,u'_{x_n})=0$ представља општи облик парцијалне диф. ј-не првог реда ($u=u(x_1,\dots,x_n)$ је непозната ф-ја променљивих $x_1,\dots,x_n$).

$f_1(x_1,\dots,x_n)\cdot u'_{x_1}+\dots+f_n(x_1,\dots,x_n)\cdot u'_{x_n}=0$ је линеарна хомогена парцијална ј-на. Нека је

$$\frac{dx_1}{f_1(x_1,\dots,x_n)}=\frac{dx_2}{f_2(x_1,\dots,x_n)}=\dots=\frac{dx_n}{f_n(x_1,\dots,x_n)}$$

придружени систем, у симетричном облику, чије решење је $\varphi_1=C_1,\dots,\varphi_{n-1}=C_{n-1}$ ($n-1$ независних првих интеграла, $\varphi_i=\varphi_i(x_1,\dots,x_n)$).

Решење (тј. опште решење) линеарне хомогене парцијалне диф. ј-не је дато са $u=F(\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1})$, где је F произвољна диф. ф-ја $(n-1)$ променљивих.

У случају Кошијевог проблема, тражи се диференцијабилна ф-ја F, таква да је задовољен услов $u(x_1,\dots,x_{n-1},x_n^0)=\psi(x_1,\dots,x_{n-1})$.

Хомогене линеарне парцијалне диференцијалне једначине

Одредити опште решење дате парцијалне једначине.

1. $u'_x + u'_y = 0.$

Решење: Из придружене једначине $\dfrac{dx}{1} = \dfrac{dy}{1}$ добијамо први интеграл $x - y = C$, па је опште решење $u(x, y) = F(x - y)$, где је F диференцијабилна функција једне променљиве.

2. $yu'_x - xu'_y = 0.$

Решење: Из придружене једначине $\dfrac{dx}{y} = \dfrac{dy}{-x}$ добијамо први интеграл $x^2 + y^2 = C$, па је опште решење $u(x, y) = F(x^2 + y^2)$, где је F диференцијабилна функција једне променљиве.

3. $xu'_x + yu'_y + zu'_z = 0.$

Решење: За $x \neq 0$ из придруженог система $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy}{y} = \dfrac{dz}{z}$ имамо независне прве интеграле $y/x = C_1$ и $z/x = C_2$, па је опште решење

$$u(x,y,z) = F\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right).$$

4. $(x-z)u'_x + (y-z)u'_y + 2zu'_z = 0.$

Решење: Придружени систем обичних диференцијалних једначина је

$$\frac{dx}{x-z} = \frac{dy}{y-z} = \frac{dz}{2z}.$$

Како су $\dfrac{(x-y)^2}{z} = C_1$ и $\dfrac{(x+z)^2}{z} = C_2$ независни први интеграли овог система, то је опште решење

$$u(x,y,z) = F\left(\frac{(x-y)^2}{z}, \frac{(x+z)^2}{z}\right),$$

где је F диференцијабилна функција две променљиве.

5. $(2z-3y)u'_x+(3x-z)u'_y+(y-2x)u'_z=0.$

Решење: Из придруженог система

$$\frac{dx}{2z-3y}=\frac{dy}{3x-z}=\frac{dz}{y-2x}$$

следе једнакости $dx+2dy+3dz=0$ и $xdx+ydy+zdz=0$, односно независни први интеграли

$$x+2y+3z=C_1,\quad x^2+y^2+z^2=C_2.$$

Према томе, опште решење је

$$u(x,y,z)=F(x+2y+3z,x^2+y^2+z^2),$$

где је F диференцијабилна функција две променљиве.

6. Одредити партикуларно решење једначине $yz'_x = xz'_y$ за које је $z(x,0) = f(x)$.

Решење: Опште решење дате једначине је $z = F(x^2 + y^2)$, где је F диференцијабилна функција једне променљиве. Избором функције F добијамо различита партикуларна решења. Из услова $f(x) = F(x^2)$ следи да је $F(t) = f(\sqrt{t})$, па је тражено решење функција z дефинисана са $z(x,y) = f(\sqrt{x^2 + y^2})$.

КВАЗИЛИНЕАРНЕ ПАРЦИЈАЛНЕ ДИФ. ЈЕДНАЧИНЕ

$f_1(x_1,\dots,x_n,u)\cdot u'_{x_1}+\dots+f_n(x_1,\dots,x_n,u)\cdot u'_{x_n}=f_{n+1}(x_1,\dots,x_n,u)$ је квазилинеарна парцијална ј-на.

Ако је $\frac{dx_1}{f_1(x_1,\dots,x_n,u)}=\frac{dx_2}{f_2(x_1,\dots,x_n,u)}=\dots=\frac{dx_n}{f_n(x_1,\dots,x_n,u)}=\frac{du}{f_{n+1}(x_1,\dots,x_n,u)}$ придружени систем, чије решење је $\varphi_1=C_1,\dots,\varphi_n=C_n$ (n независних првих интеграла, $\varphi_i=\varphi_i(x_1,\dots,x_n,u)$), тада је опште решење квазилинеарне парцијалне диф. једначине дато имплицитно са $u=u(x_1,\dots,x_n)$: $F(\varphi_1,\dots,\varphi_n)=0$, где је F произвољна диференцијабилна ф-ја n променљивих.

Ако се ф-ја u појављује само у једном интегралу придруженог система, нпр. у φ_1, тада се решење може задати са $\varphi_1(x_1,\dots,x_n,u)=G(\varphi_2,\dots,\varphi_n)$, где је G такође произвољна диференцијабилна ф-ја $(n-1)$ променљивих.

Као и код хомогене линеарне пар. ј-не, може се решавати Кошијев проблем када се тражи ф-ја F (или G) која задовољава дати Кошијев услов.

НАПОМЕНА: Нехомогена линеарна пар. ј-на је специјални случај квазилинеарне пар. ј-не.

Одредити опште решење дате парцијалне једначине.

7. $(x+y)u'_x + (x-y)u'_y = 2y.$

Решење: Из придруженог система $\dfrac{dx}{x+y} = \dfrac{dy}{x-y} = \dfrac{du}{2y}$ добијамо да је

$$d(x-y) = du, \quad y' = \frac{x-y}{x+y},$$

одакле налазимо независне прве интеграле

$$x - y - u = C_1, \quad y^2 + 2xy - x^2 = C_2.$$

Како се u појављује само у једном првом интегралу, то је

$$u(x,y) = x - y - F\left(y^2 + 2yx - x^2\right),$$

где је F диференцијабилна функција једне променљиве.

8. $(x+y-xy^2)z'_x+(x^2y-x-y)z'_y=y^2-x^2.$

Решење: Придружени систем диференцијалних једначина је

$$\frac{dx}{x+y-xy^2}=\frac{dy}{x^2y-x-y}=\frac{dz}{y^2-x^2}.$$

Из једнакости

$$\frac{xdx+ydy}{x^2-y^2}=\frac{dz}{y^2-x^2}$$

добијамо један први интеграл $x^2+y^2+2z=C_1,\ C_1\in R$, а из једнакости

$$\frac{ydx+xdy}{(y^2-x^2)(1-xy)}=\frac{dz}{y^2-x^2}$$

добијамо други први интеграл $ln\left|1-xy\right|+z=C_2,\ C_2\in R$. Како су добијени први интеграли независни, опште решење дате једначине је

$$F\left(x^2+y^2+2z, ln\left|1-xy\right|+z\right)=0.$$

9. $xy^2u'_x + x^2yu'_y = (x^2+y^2)u.$

Решење: Из придруженог система $\dfrac{dx}{xy^2} = \dfrac{dy}{x^2y} = \dfrac{du}{(x^2+y^2)u}$ добијамо

$$xdx - ydy = 0, \quad \frac{ydx + xdy}{xy(x^2+y^2)} = \frac{du}{(x^2+y^2)u},$$

одакле налазимо независне прве интеграле

$$x^2 - y^2 = C_1, \quad \frac{xy}{u} = C_2.$$

Пошто се функција u појављује само у једном првом интегралу, то је опште решење

$$u(x,y) = \frac{xy}{F(x^2-y^2)}.$$

10. $x(y^2 - z^2)z'_x - y(z^2 + x^2)z'_y = z(x^2 + y^2)$.

Решење: Из придруженог система

$$\frac{dx}{x(y^2 - z^2)} = -\frac{dy}{y(z^2 + x^2)} = \frac{dz}{z(x^2 + y^2)}$$

добијамо

$$xdx + ydy + zdz = 0, \qquad \frac{ydz + zdy}{yz(y^2 - z^2)} = \frac{dx}{x(y^2 - z^2)}.$$

Из ових једнакости налазимо независне прве интеграле и опште решење које је дато једнакошћу

$$F\left(x^2 + y^2 + z^2, \frac{xy}{z}\right) = 0.$$

12. $zu'_x + uu'_y + xu'_z = y.$

Решење: Из придруженог система добијамо независне прве интеграле

$$x^2 - z^2 = C_1, \quad y^2 - u^2 = C_2, \quad \frac{x+z}{y+u} = C_3,$$

па је опште решење дате једначине дефинисано једнакошћу

$$F\left(x^2 - z^2, y^2 - u^2, \frac{x+z}{y+u}\right) = 0,$$

где је F диференцијабилна функција три променљиве.

13. $(y+z+u)u'_x + (z+u+x)u'_y + (u+x+y)u'_z = x+y+z.$

Решење: Из придруженог система следи једнакост

$$\frac{d(x+y+z+u)}{3(x+y+z+u)} = \frac{d(x-u)}{u-x}$$

из које добијамо први интеграл

$$(x-u)^3(x+y+z+u) = C_1, \quad C_1 \in R.$$

Слично добијамо још два прва интеграла

$$(y-u)^3(x+y+z+u) = C_2, \quad (z-u)^3(x+y+z+u) = C_3, \quad C_2, C_3 \in R,$$

па је опште решење дато једнакошћу

$$F\left((x-u)^3 t, (y-u)^3 t, (z-u)^3 t\right) = 0,$$

где је $t = x+y+z+u$, а F диференцијабилна функција три променљиве.

14. Од свих интегралних површи парцијалне једначине

$$zz'_x + (z^2 - x^2)z'_y = -x$$

одредити ону која садржи криву $y = 2x^2$, $z = 3x$.

Решење: Независни први интеграли придруженог система су $x^2 + z^2 = C_1$ и $xz - y = C_2$, што значи да је опште решење дато једнакошћу $F(x^2 + z^2, xz - y) = 0$. За $y = x^2$ и $z = 2x$ имамо да је $C_1 = 10x^2$ и $C_2 = x^2$, па је $C_1 = 10C_2$. Према томе, тражено партикуларно решење је функција z дефинисана једнакошћу

$$x^2 + z^2 = 10(xz - y).$$

Задатак за самостални рад:

Одредити опште решење дате парцијалне једначине.

$$(x+y)z'_x + (y - z^2)z'_y = 0.$$

Резултат:

$$F\left(z, \frac{x+z^2}{y-z^2} - ln(y-z^2)\right) = 0.$$

Задатак за самостални рад:

Одредити опште решење дате парцијалне једначине.

$$xzz'_x + zz'_y = y - x^2.$$

Резултат:

$$z^2 = y^2 - x^2 - F\left(\frac{e^y}{x}\right).$$

Математика 3 - вежбе

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
ФАКУЛТЕТ ОРГАНИЗАЦИОНИХ НАУКА

Небојша Николић