Математика 3 - вежбе

ФОН

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
ФАКУЛТЕТ ОРГАНИЗАЦИОНИХ НАУКА

Небојша Николић

СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА
ОПШТЕ РЕШЕЊЕ И ПРВИ ИНТЕГРАЛИ СИСТЕМА

$$\left.\begin{array}{l} F_1(t,x_1,x_1',\dots,x_n,x_n')=0 \\ \vdots \\ F_n(t,x_1,x_1',\dots,x_n,x_n')=0 \end{array}\right\}$$ општи облик система n диф. једначина првог реда, са n непознатих ф-ја: $x_1=x_1(t),\dots,x_n=x_n(t)$.

Ако се из система могу изразити $x_1',x_2',\dots,x_n'$: $$\left.\begin{array}{l} x_1'=f_1(t,x_1,\dots,x_n) \\ \vdots \\ x_n'=f_n(t,x_1,\dots,x_n) \end{array}\right\}$$ нормални облик система.

Из $x_1'=\frac{dx_1}{dt},\dots,x_n'=\frac{dx_n}{dt}$ добијамо $\frac{dt}{1}=\frac{dx_1}{f_1(t,x_1,\dots,x_n)}=\dots=\frac{dx_n}{f_n(t,x_1,\dots,x_n)}$ симетричан облик система.

Решење система $$\left.\begin{array}{l} x_1=x_1(t,C_1,\dots,C_n) \\ \vdots \\ x_n=x_n(t,C_1,\dots,C_n) \end{array}\right\}$$ је опште решење. Ако би опште решење посматрали као систем по непознатим $C_1,\dots,C_n$, добили би $$\left.\begin{array}{l} C_1=\varphi_1(t,x_1,\dots,x_n) \\ \vdots \\ C_n=\varphi_n(t,x_1,\dots,x_n) \end{array}\right\}$$ n „првих интеграла" система.

Значи, опште решење можемо да изразимо преко n независних првих интеграла $\varphi_1(t,x_1,\dots,x_n)=C_1,\ \dots,\ \varphi_n(t,x_1,\dots,x_n)=C_n$. Први инт. су независни $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \varphi'_{1x_1} & \dots & \varphi'_{1x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi'_{nx_1} & \dots & \varphi'_{nx_n} \end{vmatrix} \neq 0$.

Под одређеним условима, систем од n диф. j-на првог реда се може свести на једну диф. j-ну n-тог реда (није случајно што опште решење система садржи n независних константи $C_1, \dots, C_n$, исто као и диф. j-на n-тог реда).

ЗАДАТАК 1. Систем диф. j-на $\left.\begin{array}{l} 2x'-5y'=4y-x \\ 3x'-4y'=2x-y \end{array}\right\}$ записати у нормалном и симетричном облику, и свести дати систем на диф. једначину другог реда.

Решење: Када систем решимо по x' и y' (на пример Гаусовим алгоритмом), добићемо нормални облик система: $\left.\begin{array}{l} x'=2x-3y \\ y'=x-2y \end{array}\right\}$. Како је $x'=\frac{dx}{dt}$ и $y'=\frac{dy}{dt}$ имаћемо: $\frac{dt}{1}=\frac{dx}{2x-3y}=\frac{dy}{x-2y}$ симетричан облик система. Када диференцирамо (по t) нпр. другу једначину нормалног облика добићемо $y''=x'-2y'=(2x-3y)-2(x-2y)=y$, тј. j-ну другог реда $y''-y=0$. Када ову j-ну решимо по y (за вежбу), x можемо добити нпр. из $x=y'+2y$.

НАПОМЕНА: Уопштено, симетричан облик система је $\frac{dt}{\psi_0(t,x_1,\dots,x_n)}=\frac{dx_1}{\psi_1(t,x_1,\dots,x_n)}=\dots=\frac{dx_n}{\psi_n(t,x_1,\dots,x_n)}$

ЗАДАТАК 2. Систем диф. j-на $\left.\begin{array}{l} x''=3x-4y' \\ y''=3y+4x' \end{array}\right\}$ свести на систем диф. j-на првог реда и на једну диф. j-ну вишег реда.

Решење: Две диф. j-не другог реда се своде на 4 диф. једначине 1. реда или на једну диф. j-ну 4. реда. Да бисмо дати систем свели на 4 диф. j-не 1. реда, са 4 непознате ф-је, потребне су нам још две ф-је: $u=x'$ и $v=y'$, па је дати систем еквивалентан систему: $x'=u$, $y'=v$, $u'=3x-4v$, $v'=3y+4u$.

Да би смо одредили еквивалентну j-ну 4. реда, диференцирајмо два пута, на пример j-ну $y''=3y+4x'$. Имаћемо $y'''=3y'+4x''=3y'+4(3x-4y')=-13y'+12x$ и $y^{(4)}=-13y''+12x'=-13y''+3\cdot(y''-3y)=-10y''-9y$, па је $y^{(4)}+10y''+9y=0$ тражена j-на 4. степена. Када је решимо (за вежбу), x налазимо из $12x=y'''+13y$!

ЗАДАТАК 3. Свођењем на диф. j-ну вишег реда, решити систем: $\left.\begin{array}{l} x'=1-\frac{1}{y} \\ y'=\frac{1}{x-t} \end{array}\right\}$.

Решење: Из $y''=\frac{1-x'}{(x-t)^2}$ добијамо $y''=\left(\frac{1}{x-t}\right)^2\cdot(1-x')=y'^2\cdot\frac{1}{y} \Leftrightarrow yy''=y'^2$. Добили смо диф. једначину 2. реда у којој се не појављује променљива t, па је решавамо сменом $z=y' \Rightarrow y''=z'z$, где је $z=z(y)$. Имамо $y\cdot z'\cancel{z}=z^{\cancel{2}} \Rightarrow \int\frac{dz}{z}=\int\frac{dy}{y} \Rightarrow \ldots \Rightarrow z=C_1y$. После враћања смене: $y'=C_1y \Rightarrow \int\frac{dy}{y}=\int C_1\,dt \Rightarrow \underline{y=C_2e^{C_1t}}$. Другу ф-ју можемо добити из $x-t=\frac{1}{y'} \Rightarrow \underline{x=t+\frac{1}{C_1C_2e^{C_1t}}}$.

НАПОМЕНА: Када будемо радили линеарне системе, разумећемо шта су нелинеарни системи. Да би их разликовали од линеарних, нелинеарне системе ћемо најчешће задавати у симетричном облику $\frac{dx_1}{\varphi_1(t,x_1,\ldots,x_n)}=\ldots=\frac{dx_n}{\varphi_n(t,x_1,\ldots,x_n)}=\frac{dt}{\varphi_{n+1}(t,x_1,\ldots,x_n)}$.

Систем из претходног задатка није линеаран, па би га најчешће посматрали у симетричном облику $\frac{dx}{(x-t)(y-1)}=\frac{dy}{y}=\frac{dt}{(x-t)y}$.

Нелинеарни системи диференцијалних једначина

НЕЛИНЕАРНИ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА

Решење нелинеарног система $\frac{dx_1}{\varphi_1(x_1,\dots,x_n,x_{n+1})}=\frac{dx_2}{\varphi_2(x_1,\dots,x_n,x_{n+1})}=\dots=\frac{dx_n}{\varphi_n(x_1,\dots,x_n,x_{n+1})}=\frac{dx_{n+1}}{\varphi_{n+1}(x_1,\dots,x_n,x_{n+1})}$

(n једначина са n непознатих ф-ја и једном променљивом) тражимо у облику:

$$\left.\begin{array}{l}\psi_1(x_1,\dots,x_n,x_{n+1})=C_1\\ \vdots\\ \psi_n(x_1,\dots,x_n,x_{n+1})=C_n\end{array}\right\}$$

n независних првих интеграла. Добијени први интеграли су независни ако и само ако је $\begin{vmatrix}\psi'_{1x_1} & \dots & \psi'_{1x_n}\\ \vdots & & \\ \psi'_{nx_1} & \dots & \psi'_{nx_n}\end{vmatrix}\neq 0.$

Прве интеграле добијамо налажењем интегралних комбинација из познатог система.

За налажење интегралних комбинација потребно је знати неке особине размера. На пример, ако су дате размере $R=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\dots$, тада је $R=\frac{xa}{xb}=\frac{yc}{yd}=\frac{ze}{zf}=\dots$, $R=\frac{xa\pm yc}{xb\pm yd}=$ $=\frac{xa\pm yc\pm ze}{xb\pm yd\pm zf}=\dots$ (у последњој размери може се појавити „$\frac{0}{0}$“).

Такође, потребно је знати не особине диференцијала: $xdx=\frac{1}{2}d(x^2)$, $xdx+ydy=\frac{1}{2}d(x^2+y^2)$, ..., $x^2dx=\frac{1}{3}d(x^3)$, $x^2dx+y^2dy=\frac{1}{3}d(x^3+y^3)$, ..., $ydx+xdy=d(xy)$, $yzdx+xzdy+xydz=d(xyz)$, ..., $\frac{ydx-xdy}{y^2}=d\left(\frac{x}{y}\right)$, $\frac{1}{x}dx=d(\ln x)$, $\frac{1}{x}dx+\frac{1}{y}dy=d(\ln(xy))$, ...

ЗАДАТАК4. Доказати да једнакости: $x+y+t=C_1$ и $x^2+y^2+t^2=C_2$ представљају независне прве интеграле система $\left.\begin{aligned} x'&=\frac{t-y}{y-x} \\ y'&=\frac{x-t}{y-x} \end{aligned}\right\}, y\neq x$, односно представљају решење датог система.

Решење: Диференцирањем датих једнакости добијамо систем: $\left.\begin{aligned} x'+y'+1&=0 \\ 2xx'+2yy'+2t&=0 \end{aligned}\right\}$. Решење овог система је $x'=\frac{t-y}{y-x}$ и $y'=\frac{x-t}{y-x}$, што значи да дате једнакости представљају прве интеграле датог система. Нека је $\varphi_1=x+y+t$ и $\varphi_2=x^2+y^2+t$. Тада је $\begin{vmatrix} \varphi_{1x}' & \varphi_{1y}' \\ \varphi_{2x}' & \varphi_{2y}' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2x & 2y \end{vmatrix}=$ $=2(y-x)\neq 0$ (по претпоставци је $y\neq x$), што значи да су први интеграли $\varphi_1=C_1$ и $\varphi_2=C_2$ независни, па представљају решење датог система.

ЗАДАТАК5. Налажењем првих интеграла решити систем $\left.\begin{aligned} x'&=\frac{y}{x-y} \\ y'&=\frac{x}{x-y} \end{aligned}\right\}, x\neq y$.

Решење: I начин) Одузимањем једначина добијамо $y'-x'=\frac{x-y}{x-y}=1 \Leftrightarrow \frac{d(y-x)}{dt}=1 \Leftrightarrow \int d(y-x)=\int dt$
$\Rightarrow y-x=t+C_1 \Leftrightarrow \underline{y-x-t=C_1}$ први интеграл.

Из $x\cdot x'=yy'$ $\left(=\frac{xy}{x-y}\right)$ добијамо $\int x\frac{dx}{dt}=\int y\frac{dy}{dt} \Rightarrow \frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=\frac{C_2}{2} \Leftrightarrow \underline{x^2-y^2=C_2}$ први интеграл.

За $\varphi_1 = y - x - t$ и $\varphi_2 = x^2 - y^2$ имамо $\begin{vmatrix} \varphi'_{1x} & \varphi'_{1y} \\ \varphi'_{2x} & \varphi'_{2y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2x & -2y \end{vmatrix} = 2(y-x) \neq 0$, што значи да су добијени први интеграли независни и представљају решење датог система.

II начин) Симетричан облик датог система је $\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x} = \frac{dt}{x-y}$. Прве интеграле добијамо налажењем одговарајућих интегралних комбинација.

$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x} \Rightarrow \int x\,dx = \int y\,dy \Rightarrow \frac{x^2}{2} = \frac{y^2}{2} + \frac{C_1}{2} \Leftrightarrow x^2 - y^2 = C_1$ први интеграл.

$\frac{dy-dx}{x-y} = \frac{dt}{x-y} \Rightarrow \int d(y-x) = \int dt \Rightarrow y - x = t + C_2 \Leftrightarrow y - x - t = C_2$ први интеграл.

Као под I), добијени први интеграли су независни и представљају решење датог система.

НАПОМЕНА: Независност првих интеграла нећемо да проверавамо, када је то очигледно. На пример, очигледно је да су први инт. $x^2 - y^2 = C_1$ и $y - x - t = C_2$ независни јер у једном имамо полином 2. степена, а у другом полином 1. степена (или, један садржи t, а други не).

ЗАДАТАК 6. Решити систем $\frac{dx}{-x^2} = \frac{dy}{xy - 2t^2} = \frac{dt}{xt}$.

Решење: $\frac{dx}{-x^2} = \frac{dt}{xt} \Rightarrow -\int \frac{dx}{x} = \int \frac{dt}{t} \Rightarrow C - \ln|x| = \ln|t| \Rightarrow \ln|xt| = C \Rightarrow \underline{xt = C_1}$, $C_1 = \pm e^C$.

$$\frac{y\,dx + x\,dy}{y(-x^2) + x(xy-2t^2)} = \frac{d(xy)}{-2xt^2} = \frac{dt}{xt} \Rightarrow \int d(xy) = -\int 2t\,dt \Rightarrow xy = -2\frac{t^2}{2} + C_2 \Leftrightarrow \underline{xy + t^2 = C_2}$$

Добијени први инт. су очигледно независни и представљају решење датог система.

ЗАДАТАК 7. Решити систем $\dfrac{dx}{x(y-z)} = \dfrac{dy}{y(z-x)} = \dfrac{dz}{z(x-y)}$.

Решење: $$\frac{dx+dy+dz}{x(y-z)+y(z-x)+z(x-y)} = \frac{d(x+y+z)}{0} \Rightarrow d(x+y+z) = 0 \Rightarrow \underline{x+y+z = C_1}.$$

$$\frac{yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz}{xyz(y-z)+xyz(z-x)+xyz(x-y)} = \frac{d(xyz)}{0} \Rightarrow d(xyz) = 0 \Rightarrow \underline{xyz = C_2}.$$

, независни први инт.

ЗАДАТАК 8. Решити систем $\dfrac{dx}{xz} = -\dfrac{dy}{yz} = \dfrac{dz}{xy}$.

Решење: $$\frac{dx}{xz} = -\frac{dy}{yz} \Rightarrow \int\frac{dx}{x} = -\int\frac{dy}{y} \Rightarrow \ln|x| = -\ln|y| + C \Rightarrow \ldots \Rightarrow \underline{xy = C_1}.$$

$-\dfrac{dy}{yz} = \dfrac{dz}{xy} \Rightarrow -\dfrac{dy}{yz} = \dfrac{dz}{C_1}$ (искористили смо горњи први инт. $xy = C_1$) $\Rightarrow -\displaystyle\int\frac{dy}{y} = \frac{1}{C_1}\int z\,dz \Rightarrow$

$\Rightarrow -\ln|y| + C_2 = \dfrac{1}{C_1}\cdot\dfrac{z^2}{2} \Rightarrow \dfrac{z^2}{2C_1} + \ln|y| = C_2 \Rightarrow \underline{\dfrac{z^2}{2xy} + \ln|y| = C_2}.$ (на крају враћамо $C_1 = xy$)

Добијени први инт. су независни, па представљају решење датог система.

ЗАДАТАК 9. Решити систем $\frac{dx}{x}=\frac{dy}{z+u}=\frac{dz}{y+u}=\frac{du}{y+z}$.

Решење: Пошто је дат систем са 3 једначине, требају нам 3 независна прва интеграла:

$$\frac{dy-dz}{(z+u)-(y+u)}=\frac{d(y-z)}{-(y-z)}=\frac{dx}{x}\Rightarrow c-\ln|y-z|=\ln|x|\Rightarrow c=\ln|x(y-z)|\Rightarrow \underline{x(y-z)=C_1},\quad C_1=\pm e^c.$$

$$\frac{dz-du}{(y+u)-(y+z)}=\frac{d(z-u)}{-(z-u)}=\frac{dx}{x}\Rightarrow c-\ln|z-u|=\ln|x|\Rightarrow c=\ln|x(z-u)|\Rightarrow \underline{x(z-u)=C_2},\quad C_2=\pm e^c.$$

$$\frac{dy+dz+du}{(z+u)+(y+u)+(y+z)}=\frac{d(y+z+u)}{2(y+z+u)}=\frac{dx}{x}\Rightarrow \ln|y+z+u|=2\cdot\ln|x|+C\Rightarrow \ln\left|\frac{y+z+u}{x^2}\right|=C\Rightarrow \underline{\frac{y+z+u}{x^2}=C_3},$$

где је $C_3=\pm e^c$. Добијени први инт. су независни и представљају решење датог система.

НАПОМЕНА: Слично као што смо добили прва два прва инт., могли смо добити $x(u-y)=C_3$.
Међутим, тај први инт. не би био независан са прва два (зашто?).

ЗАДАТАК 10. Решити систем $\frac{dx}{x+y-xy^2}=\frac{dy}{x^2y-x-y}=\frac{dz}{y^2-x^2}$.

Решење:

$$\frac{x\,dx+y\,dy}{x(x+y-xy^2)+y(x^2y-x-y)}=\ldots=\frac{\frac{1}{2}d(x^2+y^2)}{-(y^2-x^2)}=\frac{dz}{y^2-x^2}\Rightarrow x^2+y^2=-2z+C_1\Rightarrow \underline{x^2+y^2+2z=C_1}.$$

$$\frac{y\,dx+x\,dy}{y(x+y-xy^2)+x(x^2y-x-y)}=\ldots=\frac{d(xy)}{(1-xy)(y^2-x^2)}=\frac{dz}{y^2-x^2}\Rightarrow -\ln|1-xy|+C_2=z\Rightarrow \underline{z+\ln|1-xy|=C_2}.$$

независни први инт.

ЗАДАТАК ЗА САМОСТАЛНИ РАД: Решити једначину $\frac{dx}{y-x}=\frac{dy}{x+y+z}=\frac{dz}{x-y}$.

Резултат: Из инт. комбинације $dx+dz$ добија се први инт. $\underline{x+z=C_1}$.

Из $\frac{dx}{y-x}=\frac{dy}{y+C_1} \Leftrightarrow (y+C_1)dx+(x-y)dy=0$ (једначина са ТД) добија се $\underline{x(x+y+z)-\frac{y^2}{2}=C_2}$.

ЗАДАТАК ЗА САМОСТАЛНИ РАД: Решити систем $\frac{dx}{y-u}=\frac{dy}{z-x}=\frac{dz}{u-y}=\frac{du}{x-z}$.

Резултат: Из инт. комбинације $dx+dz$ добија се први инт. $\underline{x+z=C_1}$.

Из инт. комбинације $dy+du$ добија се први инт. $\underline{y+u=C_2}$.

Из $\frac{dx-dz}{2(y-u)}=\frac{dy-du}{2(z-x)}$ добија се последњи први инт. $\underline{(x-z)^2+(y-u)^2=C_3}$.

НАПОМЕНА: Проверити да се у оба претходна задатка добијају независни први интеграли.

Математика 3 - вежбе

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
ФАКУЛТЕТ ОРГАНИЗАЦИОНИХ НАУКА

Небојша Николић