Математика 3 - вежбе

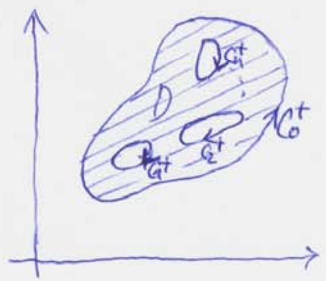
УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
ФАКУЛТЕТ ОРГАНИЗАЦИОНИХ НАУКА

Небојша Николић

КОШИЈЕВЕ ТЕОРЕМЕ И КОШИЈЕВЕ ФОРМУЛЕ

1. КОШИЈЕВА ТЕОРЕМА: Нека је D једноструко повезана област, ограничена контуром C, и нека је $f(z)$ аналитичка на D и C. Тада је

$$\oint_{C^+} f(z)\,dz = 0.$$



2. КОШИЈЕВА ТЕОРЕМА: Нека је D вишеструко повезана област, споља ограничена контуром C_0, а изнутра контурама $C_1, \dots, C_n$. Ако је функција $f(z)$ аналитичка на D и на $C_0, C_1, \dots, C_n$, тада је $\oint_{C^+} f(z)\,dz = 0$, где је C граница области D (унија контура $C_0, C_1, \dots, C_n$).

ПОСЛЕДИЦА 1: Под условима 1. теореме, ако су A и B тачке из D и L_1 и L_2 криве из D које спајају A и B, биће $\int_{L_1} f(z)\,dz = \int_{L_2} f(z)\,dz = \int_A^B f(z)\,dz$, тј. интеграл не зависи од избора криве која спаја A и B.

ПОСЛЕДИЦА 2: Под условима 2. теореме важи $\oint_{C_0^+} f(z)\,dz = \oint_{C_1^-} f(z)\,dz + \dots + \oint_{C_n^-} f(z)\,dz$.

Кошијева теорема и Кошијеве формуле. Резидуум функције комплексне променљиве

Под условима теореме 1. важи Њутн-Лајбницова формула: $\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz = F(z)\Big|_{z_1}^{z_2} = F(z_2)-F(z_1)$, где $F(z)$ примитивна ф-ја (неодређени интеграл) ф-је $f(z)$. На пример: $\int_0^{\pi i} e^z\,dz = e^z\Big|_0^{\pi i} = e^{\pi i}-e^0 = -1-1=-2.$

1. КОШИЈЕВА ФОРМУЛА: Нека је $f(z)$ аналитичка на области D, $z_0 \in D$ и контура $G \subseteq D$, око тачке z_0. Тада је

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{G^+} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz.$$

2. КОШИЈЕВА ФОРМУЛА: Под горњим условима важи $f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{G^+} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz$, $n \in \mathbb{N}$.

ПОСЛЕДИЦА 3: Вредности аналитичке ф-је, као и свих њених извода, на области, потпуно је одређена вредностима ф-је на контури која ограничава ту област.

НАПОМЕНА: Кошијеве формуле ћемо моћи да искористимо за израчунавање интеграла:

$$\int_{G^+} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = 2\pi i\cdot f(z_0) \quad \text{и} \quad \int_{G^+} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz = \frac{2\pi i\cdot f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

1. Израчунати $\int_{C+} (z-a)^n dz$ ако је C контура која обухвата тачку $z = a$ и ако је n цео број.

Решење: Ако је $n \geq 0$, тада је подинтегрална функција f датог интеграла I регуларна, па је $I = 0$.

Ако је $n < 0$, тада је

$$I = \int_{C_\rho^+} f(z)dz, \quad C_\rho = \{z \ : \ |z-a| = \rho\},$$

где је $\rho > 0$ и такво да је контура C_ρ унутар контуре C. За $z \in C_\rho$ је $z = a + \rho e^{it}$, па је

$$I = \rho^{n+1} i \int_0^{2\pi} e^{(n+1)ti} dt = \begin{cases} 2\pi i, & n = -1 \\ 0, & n < -1 \end{cases}$$

2. Израчунати $\int_L \frac{dz}{z}$ ако је L проста глатка крива која спаја тачке 1 и -1, при чему су имагинарни делови тачака криве (осим крајњих) (1) позитивни; (2) негативни.

Решење: (1) Нека је $L_1 = \{z \ : \ z = e^{it}, \ 0 \le t \le \pi\}$. Тада је

$$\int_L \frac{dz}{z} = \int_{L_1} \frac{dz}{z} = \int_0^{\pi} i dt = \pi i.$$

(2) Нека је $L_2 = \{z \ : \ z = e^{it}, \ 0 \ge t \ge -\pi\}$. Тада је

$$\int_L \frac{dz}{z} = \int_{L_2} \frac{dz}{z} = \int_0^{-\pi} i dt = -\pi i.$$

3. Израчунати $\int_L ze^z dz$, где је $L = \{z \mid z = e^{it},\ t \in [-\pi/2, \pi/2]\}$.

Решење: Пошто је функција $f : z \mapsto ze^z$ регуларна у целој комплексној равни, а $F : z \mapsto ze^z - e^z$ њена примитивна функција, то је

$$\int_C f(z)dz = F(i) - F(-i) = ie^i + ie^{-i} - e^i + e^{-i} = 2i(\cos 1 - \sin 1).$$

4. Израчунати $\int_L z \sin z dz$ ако је L проста глатка крива која спаја тачке $\pi/2$ и i.

Решење: Како је $f : z \mapsto z \sin z$ регуларна у целој комплексној равни, то је

$$\int_L z \sin z dz = -z\cos z + \sin z \Big|_{\pi/2}^{i} = -i\frac{e^{-1}+e}{2} + \frac{e^{-1}-e}{2i} - 1 = -1 - \frac{1}{e}i.$$

Кошијева теорема и Кошијеве формуле. Резидуум функције комплексне промењливе

5. Израчунати $\displaystyle\int_{C+} \frac{z\,dz}{z^2-1}$ ако је $C = \{z \,:\, |z-1| = 1/2\}$.

Решење: Ако је g подинтегрална функција датог интеграла I, онда је

$$g(z) = \frac{z}{z+1} \cdot \frac{1}{z-1} = \frac{f(z)}{z-1}.$$

Како је f регуларна у области која садржи C, то је $I = 2\pi i f(1) = \pi i$.

6. Израчунати $\displaystyle\int_{C+} \frac{z^4\,dz}{z^4-1}$ ако је $C = \{z \,:\, |z-2| = 2\}$.

Решење: Ако је g подинтегрална функција датог интеграла I, онда је

$$g(z) = \frac{z^4}{(z^2+1)(z+1)} \cdot \frac{1}{z-1} = \frac{f(z)}{z-1}.$$

Како је f регуларна у области која садржи C, то је $I = 2\pi i f(1)$

7. Израчунати $\displaystyle\int_{C+} \frac{e^z\,dz}{z(1-z)^3}$ ако је $C = \{z \,:\, |z-1| = 1/2\}$.

Решење: Ако је g подинтегрална функција датог интеграла I, онда је

$$g(z) = \frac{f(z)}{(z-1)^3}, \quad f(z) = -\frac{e^z}{z}, \quad f'(z) = -\frac{e^z}{z} + \frac{e^z}{z^2}, \quad f''(z) = -\frac{z^3 - 2z^2 + 2z}{z^4}e^z.$$

Како је f регуларна у области која садржи C, то је $I = \dfrac{2\pi i}{2!} f''(1) = -e\pi i$.

8. Израчунати $\displaystyle\int_{C+} \frac{ze^z dz}{(z+1)(z-1)^2}$ ако је $C = \{z \;:\; |z| = 2\}$.

Решење: Нека је f подинтегрална функција датог интеграла I и нека је

$$C_1 = \{z \;:\; |z-1| = 1\},\ C_2 = \{z \;:\; |z+1| = 1\},\ I_1 = \int_{C_1^+} f(z)dz,\ I_2 = \int_{C_2^+} f(z)dz.$$

Тада је

$$I = I_1 + I_2 = 2\pi i \left(f_1(-1) + f_2'(1)\right),$$

где је $f_1(z) = \dfrac{ze^z}{(z-1)^2}$ и $f_2(z) = \dfrac{ze^z}{(z-1)}$. Према томе,

$$I = 2\pi i \left(\frac{-e^{-2}}{4} + \frac{3}{2}\frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4}\right) = 2\pi i \left(-\frac{e^{-2}+e^2}{4} + \frac{3}{2}e^2\right) = 3\pi(e^2 - ch\,2)i.$$

РЕЗИДУУМ ФУНКЦИЈЕ КОМПЛЕКСНЕ ПРОМЕНЉИВЕ

Ако је z_0 изоловани сингуларитет ф-је $f(z)$, резидуум ф-је $f(z)$, у тачки z_0, дефинише се формулом $\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C^+} f(z)\,dz$, где је C контура која ограничава z_0, а $f(z)$ је аналитичка у свим тачкама неке области која садржи C, сем у z_0.

Очигледно је $\oint_{C^+} f(z)\,dz = 2\pi i \cdot \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)$. Из Кошијевих теорема следи општије:

$$\oint_{C^+} f(z)\,dz = 2\pi i \cdot \sum_{z=z_i} \operatorname*{Res}_{z=z_i} f(z)$$, где су z_i сви сингуларитети из области коју ограничава контура C.

Помоћу Кошијевих формула, моћи ћемо да израчунамо резидууме у сингуларитетима који су полови: 1° Ако је $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z) = W_0 \neq 0$, тада је z_0 пол 1. реда и $\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$.

2° Ако је $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^n f(z) = W_0 \neq 0$, тада је z_0 пол n. реда и $\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to z_0}\left[(z-z_0)^n f(z)\right]^{(n-1)}$

9. Израчунати $\displaystyle\int_{C+} \frac{zdz}{(z^2-1)^2(z^2+1)}$, где је $C = \{x+iy \mid x^2+y^2 = 2x+2\}$.

Решење: Контура C је кружница $(x-1)^2+y^2 = 3$, па области D коју она ограничава припадају полови $z=1$, $z=i$ и $z=-i$ подинтегралне функције f датог интеграла I. Како је

$$\underset{z=1}{res}\, f(z) = \lim_{z\to 1}\left(\frac{z}{(z+1)^2(z^2+1)}\right)' = -\frac{1}{8}, \quad \underset{z=i}{res}\, f(z) = \underset{z=-i}{res}\, f(z) = \frac{1}{8},$$

то је $I = 2\pi i\left(-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right) = \frac{\pi}{4}i.$

10. Израчунати $\displaystyle\int_{C+} \frac{z^2dz}{(z^2+1)^2(z^2+2z+2)}$ ако је C граница области D, где је $D = \{z \mid |z| \leq 2,\ Im(z) \geq 0\}$.

Решење: Подинтегрална функција f датог интеграла I има у датом полукругу пол реда два у тачки $z = i$ и пол првог реда у тачки $z = -1+i$. Како је

$$\underset{z=i}{res} f(z) = \lim_{z\to i}\left(\frac{z^2}{(z+i)^2(z^2+2z+2)}\right)' = \frac{9i-12}{100},$$

$$\underset{z=-1+i}{res} f(z) = \lim_{z\to -1+i} \frac{z^2}{(z^2+1)^2(z+1+i)} = \frac{3-4i}{25},$$

то је

$$I = 2\pi i\left(\frac{9i-12}{100} + \frac{3-4i}{25}\right) = \frac{7}{50}\pi.$$

11. Израчунати $\int_{C+} \frac{z^2 dz}{(z^2-1)(z-1)^2}$ ако је C контура која не садржи тачке 1 и -1.

Решење: Нека је f подинтегрална функција датог интеграла I и нека је D област коју затвара контура C. Како је

$$\underset{z=1}{res} f(z) = \frac{1}{2} \underset{z\to 1}{lim} \left(\frac{z^2}{z+1}\right)'' = \frac{1}{8}, \quad \underset{z=-1}{res} f(z) = \underset{z\to -1}{lim} \frac{z^2}{(z-1)^3} = -\frac{1}{8},$$

то је

$I = \pi i/4$ ако тачка 1 припада, а тачка -1 не припада D,

$I = -\pi i/4$ ако тачка 1 не припада, а тачка -1 припада D,

$I = 0$ ако тачке 1 и -1 обе припадају или обе не припадају D.

12. Израчунати $\displaystyle\int_{C+} \frac{e^z\,dz}{ch\ z}$ ако је $C = \{x + iy \mid |x| + |y| = 2\}$.

Решење: Како је $ch\ z = 0$ ако је $e^z + e^{-z} = 0$, односно $e^{2z} + 1 = 0$, $2z = Ln(-1)$, сингуларитети подинтегралне функције f датог интеграла I су тачке $z_k = \dfrac{2k+1}{2}\pi i$. Међутим, једино тачке $z_0 = \dfrac{\pi}{2}i$ и $z_{-1} = -\dfrac{\pi}{2}i$ припадају области ограниченој кружницом C. Из

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = e^{\pi i/2} \lim_{z\to z_0} \frac{z - \pi i/2}{ch\ z} = \frac{e^{\pi i/2}}{sh\ (\pi i/2)} = \frac{e^{\pi i/2}}{i\,sin(\pi/2)} = \frac{1}{i} e^{\pi i/2},$$

$$\operatorname*{res}_{z=z_{-1}} f(z) = e^{-\pi i/2} \lim_{z\to z_{-1}} \frac{z + \pi i/2}{ch\ z} = \frac{e^{-\pi i/2}}{sh\ (-\pi i/2)} = \frac{e^{-\pi i/2}}{i\,sin(-\pi/2)} = -\frac{1}{i} e^{-\pi i/2},$$

то је

$$I = 2\pi i(\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) + \operatorname*{res}_{z=z_{-1}} f(z)) == 2\pi \left(e^{\pi i/2} - e^{-\pi i/2}\right) = 4\pi i.$$

13. Израчунати $\displaystyle\int_{C^-} \frac{dz}{z^2 \sin z}$ ако је $C = \{z : |z| = 1\}$.

Решење: Ако је I дати интеграл, а f подинтегрална функција, онда је

$$I = -\int_{C^+} f(z)dz = -2\pi i \operatorname*{res}_{z=0} f(z).$$

Како функција f има у $z = 0$ пол трећег реда (зашто?), то је

$$\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = \frac{1}{2} \lim_{z\to 0} \left(\frac{z}{\sin z}\right)'' = \frac{1}{2} \lim_{z\to 0} \left(\frac{\sin z - z\cos z}{\sin^2 z}\right)' = \frac{1}{2} \lim_{z\to 0} g(z).$$

Ако три пута применимо Лопиталово правило, добијамо

$$\begin{aligned}\lim_{z\to 0} g(z) &= \lim_{z\to 0} \frac{\sin^2 z + 2\cos^2 z - 2\cos 2z - z\sin 2z}{3\sin^2 z\cos z} \\ &= \lim_{z\to 0} \frac{2\sin 2z - 2z\cos 2z}{6\sin z\cos^2 z - 3\sin^3 z} = \lim_{z\to 0} \frac{\cos 2z}{3\cos^3 z}.\end{aligned}$$

Према томе, $\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = \dfrac{1}{6}$, па је $I = -\dfrac{\pi}{3} i$.

14. Израчунати $\int_{C+} \frac{z\,dz}{sin^2 z}$ где је $C = \{z \mid |z| = 5\}$.

Решење: Сингуларитети подинтегралне функције f датог интеграла I су тачке $z_k = k\pi$, при чему је у z_0 пол првог реда, а остали сингуларитети су полови другог реда. Како области ограниченој кружницом C припадају само сингуларитети z_{-1}, z_0 и z_1, то је

$$I = 2\pi i(\underset{z=z_{-1}}{res} f(z) + \underset{z=z_0}{res} f(z) + \underset{z_1}{res} f(z)).$$

За пол z_0 имамо да је

$$\underset{z=z_0}{res} f(z) = \lim_{z\to 0} z f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{z^2}{sin^2 z} = 1.$$

Како је

$$\underset{z=z_1}{res} f(z) = \lim_{z\to\pi}\left((z-\pi)^2\frac{z}{sin^2 z}\right)'$$

и

$$\left((z-\pi)^2\frac{z}{sin^2 z}\right)' = \frac{z-\pi}{sin\, z}\cdot\frac{(3z-\pi)\,sin\, z-(2z^2-2z\pi)\,cos\, z}{sin^2 z},$$

то је

$$\begin{aligned}\underset{z=z_1}{res} f(z) &= -\lim_{z\to\pi}\frac{(3z-\pi)\,sin\, z-(2z^2-2z\pi)\,cos\, z}{sin^2 z}\\ &= \lim_{u\to 0}\frac{(2\pi+3u)\,sin\, u-(2\pi u+2u^2)\,cos\, u}{sin^2 u}\\ &= 1.\end{aligned}$$

Слично добијамо да је

$$\underset{z=z_{-1}}{res} f(z) = \lim_{z\to-\pi}((z+\pi)^2 f(z))' = 1,$$

па је $I = 6\pi i$.

Задатак за самостални рад:

Израчунати $\int_L (iz^2 - 2ze^{z^2})dz$ ако је L проста део по део глатка крива која спаја тачке $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$ и $z_2 = i$.

Резултат:

$$I = \frac{2-\sqrt{2}}{6} - e^{-1} + cos\,1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{6} - sin\,1\right)i.$$

Задатак за самостални рад:

Израчунати $\int_{C+} \frac{dz}{z^5 - z^3}$ ако је $C = \{z \mid |z-1|^2 = 2\}$.

Резултат:

$I = -\pi i.$

Математика 3 - вежбе

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
ФАКУЛТЕТ ОРГАНИЗАЦИОНИХ НАУКА

Небојша Николић