# Математика 3 - вежбе

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
ФАКУЛТЕТ ОРГАНИЗАЦИОНИХ НАУКА

Небојша Николић

# ЛАПЛАСОВА ТРАНСФОРМАЦИЈА
## - ДЕФИНИЦИЈА И ОСОБИНЕ -

Нека је $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ и $F:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$. Лапласовом трансформацијом $\mathcal{L}$ се датој ф-ји $f$ придружује ф-ја $F$, по формули $F(s)=\mathcal{L}[f(t)]=\int_0^{+\infty} e^{-st}f(t)dt$ , $t\in\mathbb{R}, s\in\mathbb{C}$.

Реална ф-ја $f(t)$ је дефинисана за $t\in[0,+\infty)$, док је слика, тј. комплексна ф-ја $F(s)$ дефинисана за све $s\in\mathbb{C}$ за које несвојствени интеграл $\int_0^{+\infty} e^{-st}f(t)dt$ конвергира. Уколико интеграл не конвергира ни за једно $s$, кажемо да не постоји Лапласова слика ф-је $f(t)$. Важи:

ТЕОРЕМА: Ако је $f(t)$ дефинисана на $[0,+\infty)$, има највише коначно много прекида I врсте на сваком коначном подинтервалу од $[0,+\infty)$ и ако је $f(t)$ експоненцијалног реда раста ($|f(t)|\le Me^{at}$, за неке конст. $M$ и $a$ и свако $t>0$), тада $\int_0^{+\infty} e^{-st}f(t)dt$ конвергира, тј. постоји $\mathcal{L}[f(t)]$, за све $s$ за које је $\operatorname{Re}s>a$.
Штавише, $F(s)=\int_0^{+\infty} e^{-st}f(t)dt$ је аналитичка у области $\operatorname{Re}s>a$.

За ф-ју $f(t)$ која задовољава услове горње теореме кажемо да припада класи $E(a)$.

# Лапласова трансформације - дефиниција и особине

Користећи дефиницију Лапласове трансформације може се добити следећа табела са особинама Лапласове тр. и табела основних Лапласових трансформација:

## ОСОБИНЕ ЛАПЛАСОВЕ ТРАНСФОРМАЦИЈЕ

| | ОРИГИНАЛ $(f(t))$ | СЛИКА $(F(s))$ |
|---|---|---|
| 1. | $\sum_{i=1}^{n} c_i f_i(t)$ | $\sum_{i=1}^{n} c_i F_i(s)$ |
| 2. | $f(at)$ | $\frac{1}{a}F(\frac{s}{a}),\quad a>0$ |
| 3. | $U(t-a)\cdot f(t-a)$ | $e^{-as}F(s),\quad a>0$ |
| 4. | $e^{at}f(t)$ | $F(s-a)$ |

# Лапласова трансформације - дефиниција и особине

| | | |
|---|---|---|
| 5. | $t \cdot f(t)$ | $-F'(s)$ |
| 6. | $t^n \cdot f(t)$ | $(-1)^n F^{(n)}(s)$ |
| 7. | $\dfrac{f(t)}{t}$ | $\int_s^\infty F(p)dp$ |
| 8. | $f'(t)$ | $sF(s) - f(0)$ |
| 9. | $f^{(n)}(t)$ | $s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0)$ |
| 10 | $\int_0^t f(x)dx$ | $\dfrac{F(s)}{s}$ |
| 11. | $\int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \ldots \int_0^{t_{n-1}} f(t_n)dt_n$ | $\dfrac{F(s)}{s^n}$ |
| 12. | $f_1 * f_2$ | $F_1(s) \cdot F_2(s)$ |
| 13. | $(\forall t > 0)\ f(t) = f(t+T)$ | $F(s) = \dfrac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t)\, dt$ |

## ОСНОВНЕ ЛАПЛАСОВЕ ТРАНСФОРМАЦИЈЕ

| ОРИГИНАЛ $(f(t))$ | СЛИКА $(F(s))$ |
|---|---|
| 1. $1$ | $\frac{1}{s}$, $\mathrm{Re}(s) > 0$ |
| 2. $t^n$ | $\frac{n!}{s^{n+1}}$, $\mathrm{Re}(s) > 0,\ n \in \mathrm{N}$ |
| 3. $U(t-a)$ | $\frac{e^{-as}}{s}$, $\mathrm{Re}(s) > 0,\ a > 0$ |
| 4. $e^{at}$ | $\frac{1}{s-a}$, $\mathrm{Re}(s) > a$ |
| 5. $\sin bt$ | $\frac{b}{s^2+b^2}$, $\mathrm{Re}(s) > 0$ |
| 6. $\cos bt$ | $\frac{s}{s^2+b^2}$, $\mathrm{Re}(s) > 0$ |
| 7. $U(t-a)\cdot(t-a)^n$ | $\frac{e^{-as}n!}{s^{n+1}}$, $\mathrm{Re}(s) > 0,\ a > 0$ |
| 8. $U(t-a)\cdot\sin b(t-a)$ | $\frac{e^{-as}b}{s^2+b^2}$, $\mathrm{Re}(s) > 0,\ a > 0$ |

# Лапласова трансформације - дефиниција и особине

| | | |
|---|---|---|
| 9. $U(t-a)\cdot\cos b(t-a)$ | $\dfrac{e^{-as}s}{s^2+b^2}$, | $\mathrm{Re}(s)>0,\ a>0$ |
| 10. $e^{at}t^n$ | $\dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}$, | $\mathrm{Re}(s)>a$ |
| 11. $e^{at}\sin bt$ | $\dfrac{b}{(s-a)^2+b^2}$, | $\mathrm{Re}(s)>a$ |
| 12. $e^{at}\cos bt$ | $\dfrac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$, | $\mathrm{Re}(s)>a$ |
| 13. $t\sin bt$ | $\dfrac{2sb}{(s^2+b^2)^2}$, | $\mathrm{Re}(s)>0$ |
| 14. $t\cos bt$ | $\dfrac{s^2-b^2}{(s^2+b^2)^2}$, | $\mathrm{Re}(s)>0$ |
| 15. $\dfrac{\sin bt}{t}$ | $\dfrac{\pi}{2}-\mathrm{arctg}\dfrac{s}{b}$, | $\mathrm{Re}(s)>0$ |
| 16. $\mathrm{sh}\,bt$ | $\dfrac{b}{s^2-b^2}$, | $\mathrm{Re}(s)>\lvert b\rvert$ |
| 17. $\mathrm{ch}\,bt$ | $\dfrac{s}{s^2-b^2}$, | $\mathrm{Re}(s)>\lvert b\rvert$ |

# Лапласова трансформације - дефиниција и особине

1. Доказати да за функцију $f: t \mapsto sin\,\frac{1}{t}$ постоји Лапласова трансформација.

   Решење: Нека је $I = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$. Како је

$$\int_0^\infty e^{-st}|f(t)|dt = \int_0^\infty e^{-st}\left|sin\,\frac{1}{t}\right|dt \leq \int_0^\infty e^{-st}dt$$

   и како последњи интеграл конвергира за $Re(s) > 0$, то важи и за интеграл $I$. Према томе, за функцију $f$ постоји Лапласова слика, а самим тим и трансформација.

2. Доказати да функција $f: t \mapsto e^{t^2}$ нема Лапласову слику.

   Решење: Како је

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = \int_0^\infty e^{-st} e^{t^2} dt = \int_0^\infty e^{t^2 - st} dt$$

   и како, за свако $s$,

$$e^{t^2 - st} \to \infty \quad (t \to \infty),$$

   то Лапласова слика функције $f$ не постоји.

# Лапласова трансформације - дефиниција и особине

3. Одредити $L[f]$ ако је $f(t) = \int_0^\infty e^{-tx^2} dx$.

**Решење:** На основу дефиниције Лапласове слике је

$$F(s) = \int_0^\infty \left( e^{-st} \int_0^\infty e^{-tx^2} dx \right) dt = \int_0^\infty \left( \int_0^\infty e^{-t(s+x^2)} dt \right) dx = \int_0^\infty \frac{dx}{s+x^2},$$

где је $F = L[f]$. Дакле, $F(s) = \frac{\pi}{2\sqrt{s}}$.

4. Користећи Лапласову слику за функцију $f : t \mapsto e^t$ одредити Лапласове слике за функције $g : t \mapsto e^{at}$ $(a \in R)$ и $h : t \mapsto a^t$ $(a \in R_+)$.

**Решење:** Функције $f$ и $g$ су сличне. Ако је $F = L[f]$ и $G = L[g]$, онда на основу теореме о слици сличног оригинала је, за $Re(s) > a$,

$$G(s) = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right) = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{s/a - 1} = \frac{1}{s-a}.$$

Ако је $H = L[h]$, онда из једнакости $h(t) = f(t \ln a)$ следи да је $H(s) = \frac{1}{s - \ln a}$ за $Re(s) > \ln a$.

5. Користећи Лапласове слике за функције $sin$ и $cos$ одредити Лапласове слике за функције $f : t \mapsto sin\, at$ и $g : t \mapsto cos\, at$.

**Решење:** Нека је $S = L[sin]$, $C = L[cos]$, $F = L[f]$ и $G = L[g]$. Како су функције $sin$ и $f$, односно $cos$ и $g$ сличне, то је

$$F(s) = \frac{1}{a} S\left(\frac{s}{a}\right) = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{s^2/a^2 + 1} = \frac{a}{s^2 + a^2}, \quad G(s) = \frac{1}{a} C\left(\frac{s}{a}\right) = \frac{1}{a} \cdot \frac{s/a}{s^2/a^2 + 1} = \frac{s}{s^2 + a^2}.$$

6. Одредити Лапласове слике за функције $f : t \mapsto sh\ at$ и $g : t \mapsto ch\ at$.

**Решење:** Нека је $F = L[f]$ и $G = L[g]$. Како је

$$sh\ at = \frac{1}{2} e^{at} - \frac{1}{2} e^{-at}, \quad ch\ at = \frac{1}{2} e^{at} + \frac{1}{2} e^{-at},$$

то је на основу својства линеарности, за $Re(s) > |a|$,

$$F(s) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s+a}\right) = \frac{a}{s^2 - a^2},$$

$$G(s) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a}\right) = \frac{s}{s^2 - a^2}.$$

7. Одредити $L[f]$ ако је $f(t) = cos^3 t$.

Решење: Из једнакости $cos\, t = \dfrac{e^{it} + e^{-it}}{2}$ следи да је

$$cos^3 t = \frac{1}{8}\left(e^{3ti} + 3e^{ti} + 3e^{-ti} + e^{-3ti}\right) = \frac{1}{4}\, cos\, 3t + \frac{3}{4}\, cos\, t.$$

Према томе,

$$L[f](s) = \frac{1}{4} \cdot \frac{s}{s^2+9} + \frac{3}{4} \cdot \frac{s}{s^2+1} = \frac{s(s^2+7)}{(s^2+1)(s^2+9)}.$$

8. Одредити $L[f]$ ако је $f(t) = sin^4 t$.

Решење: Ако је $g(t) = cos^2 2t$, онда је $L[g](s) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{s} + \dfrac{1}{s^2+16}\right)$, па из једнакости

$$sin^4 t = \left(\frac{1 - cos\, 2t}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(1 + cos^2 2t - 2\, cos\, 2t\right)$$

следи да је

$$L[f](s) = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{s} - \frac{2s}{s^2+4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{s}{s^2+16}\right) = \frac{24}{s(s^2+4)(s^2+16)}.$$

9. Одредити $L[f]$ ако је $f(t) = e^{-t} cos^2 t$.

Решење: Ако је $g(t) = cos^2 t$, онда је $L[f](s) = G(s+1)$. Како је $g(t) = \frac{1 + cos\,2t}{2}$, то је

$$G(s) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s} + \frac{s}{s^2+4}\right) = \frac{s^2+2}{s(s^2+4)}, \quad F(s) = \frac{s^2+2s+3}{(s+1)(s^2+2s+5)}.$$

10. Одредити $L[g]$ ако је $g(t) = f(t) ch\, at$ $(a \in R)$ и $F = L[f]$.

Решење: Како је $g(t) = \frac{1}{2} f(t) e^{at} + \frac{1}{2} f(t) e^{-at}$, то је

$$L[g](s) = \frac{1}{2} F(s-a) + \frac{1}{2} F(s+a) = \frac{1}{2}\left(F(s-a) + F(s+a)\right).$$

# Лапласова трансформације - дефиниција и особине

11. Одредити $L[f]$ ако је $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 1 \\ e^{1-t}, & t \geq 1 \end{cases}$.

Решење: Ако је $u$ одскочна функција, $g(t) = e^{-t}$, $G = L[g]$ и $F = L[f]$, онда је

$$f(t) = u(t-1)e^{-(t-1)}, \quad F(s) = e^{-s}G(s) = \frac{e^{-s}}{s+1}.$$

12. Одредити $L[f]$ ако је $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \text{ или } t \geq 2a \\ 1, & 0 \leq t < a \\ -1, & a \leq t < 2a \end{cases}$.

Решење: Ако је $u$ одскочна функција, онда је

$$f(t) = u(t) - 2u(t-a) + u(t-2a),$$

па је $L[f](s) = \dfrac{1}{s}\left(1 - e^{-as}\right)^2$.

13. Одредити $L[f]$ ако је $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \text{ или } t \geq 2 \\ t, & 0 < t \leq 1 \\ 2-t, & 1 < t \leq 2 \end{cases}$.

Решење: Ако је $u$ одскочна функција, онда је

$$\begin{aligned} f(t) &= t\,(u(t) - u(t-1)) + (2-t)\,(u(t-1) - u(t-2)) \\ &= tu(t) - 2(t-1)u(t-1) + (t-2)u(t-2), \end{aligned}$$

па је

$$L[f](s) = \frac{1}{s^2} - \frac{2e^{-s}}{s^2} + \frac{e^{-2s}}{s^2} = \frac{(1-e^{-s})^2}{s^2}.$$

# Лапласова трансформације - дефиниција и особине

14. Одредити $L[f]$ ако је $f(t) = t^2 \sin at \ (a \in R)$.

Решење: Ако је $L[f] = F$, онда је

$$F(s) = (-1)^2 \left( \frac{a}{s^2 + a^2} \right)'' = 2a \cdot \frac{3s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^3}.$$

15. Одредити $L[f]$ ако је $f(t) = t^n e^{at}$.

Решење: Ако је $h(t) = e^{at}$ и $L[h] = H$, онда је

$$L[f](s) = (-1)^n H^{(n)}(s) = (-1)^n \left( \frac{1}{s-a} \right)^{(n)} = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}.$$

Друго решење: Ако је $g(t) = t^n$, онда је $L[g](s) = \dfrac{n!}{s^{n+1}}$, па је

$$L[f](s) = L[g](s-a) = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}.$$

16. Одредити $L[f]$ ако је $f(t) = \frac{e^{-at}}{t} \cdot sin\, bt$, где је $a \in R$ и $b \in R$.

**Решење:** Ако је $g(t) = \frac{sin\, bt}{t}$ и $G = L[g]$, онда је

$$G(s) = \int_s^{\infty} \frac{b}{z^2 + b^2} dz = \frac{\pi}{2} - arctan \frac{s}{b} = arccot \frac{s}{b},$$

па је

$$L[f](s) = G(s+a) = arccot \frac{s+a}{b}.$$

17. Одредити $L[f]$ ако је $f(t) = \frac{sin^2 t}{t^2}$.

**Решење:** Ако је $g(t) = sin^2 t$, $h(t) = g(t)/t$, $G = L[g]$, $H = L[h]$ и $F = L[f]$, онда је

$$H(s) = \int_s^{\infty} G(z) dz = \frac{1}{2} ln \frac{z}{\sqrt{z^2+4}} \Big|_s^{\infty} = -\frac{1}{2} ln \frac{s}{\sqrt{s^2+4}} = \frac{1}{4} ln \frac{s^2+4}{s^2},$$

$$F(s) = \int_s^{\infty} H(z) dz = \frac{1}{4} \int_s^{\infty} ln \frac{z^2+4}{z^2} dz = \frac{1}{4} \left( z\, ln \frac{z^2+4}{z} \Big|_s^{\infty} + 8 \int_s^{\infty} \frac{dz}{z^2+4} \right).$$

Према томе,

$$F(s) = -\frac{1}{4} s\, ln \frac{s^2+4}{s^2} + \frac{\pi}{2} - arctan \frac{s}{2}.$$

18. Одредити $L[f']$ ако је $f(t) = e^{-at}\cos t$ $(a \in R)$.

Решење: Како је $L[f](s) = \dfrac{s+a}{(s+a)^2+1}$ и $f(0) = 1$, то је

$$L[f'](s) = sL[f](s) - f(0) = \frac{s(s+a)}{(s+a)^2+1} - 1.$$

Напомена: Наравно, може и $f'(t) = -e^{-at}(a\cos t + \sin t)$, а затим применити Лапласову трансформацију.

19. Одредити $L[f]$ ако је $f(t) = \dfrac{d^n}{dt^n}\left(\dfrac{t^n}{e^t}\right)$.

Решење: Ако је $g(t) = t^n e^{-t}$, онда је $g(0) = g'(0) = \cdots = g^{(n-1)}(0) = 0$, па је

$$L[f](s) = L[g^{(n)}](s) = s^n L[g](s) = s^n \frac{n!}{(s+1)^{n+1}}.$$

# Лапласова трансформације - дефиниција и особине

20. Одредити $L[f]$ ако је $f(t) = \int_0^t \frac{g(x)}{x}dx$ и $G = L[g]$.

Решење: Ако је $h(t) = \frac{g(t)}{t}$ и $H = L[h]$, онда је

$$F(s) = \frac{H(s)}{s} = \frac{1}{s}\int_s^{\infty} G(z)dz.$$

21. Одредити $L[f]$ ако је $f(t) = \int_0^t \frac{\sin x}{x}dx$.

Решење: Ако је $S = L[sin]$, онда на основу претходног задатка следи да је

$$L[f](s) = \frac{1}{s}\int_s^{\infty} S(z)dz = \frac{1}{s}\int_s^{\infty} \frac{dz}{z^2+1} = \frac{1}{s}\left(\frac{\pi}{2} - arctan\, s\right).$$

22. Одредити $L[f]$ ако је $f(t) = \int_0^t (t-x)e^x dx$.

Решење: Ако је $g(t) = t$ и $h(t) = e^t$, онда је $f = g * h$, па је $L[f](s) = \frac{1}{s^2} \cdot \frac{1}{s-1}$.

Напомена: Може и

$$f(t) = (t-x)e^x \Big|_0^t + \int_0^t e^x dx = e^t - t - 1,$$

одакле следи $L[f](s) = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} = \frac{1}{s^2(s-1)}$, али је једноставније помоћу својства Лапласове слике конволуције.

23. Одредити $L[f]$ ако је $f(t) = \int_0^t cos(t-x)\, cos\, x dx$.

Решење: Како је $f(t) = (cos * cos)(t)$, то је

$$L[f](s) = \frac{s}{s^2+1} \cdot \frac{s}{s^2+1} = \frac{s^2}{(s^2+1)^2}.$$

Напомена: Без својства конволуције је знатно дуже решавање јер је

$$f(t) = \frac{1}{2} \int_0^t (cos\, t + cos(t-2x))dx = \frac{1}{2}(t\, cos\, t + sin\, t).$$

24. Одредити $L[f]$ ако је $f$ периодична функција са периодом $T=2$, при чему је $f(t)=\begin{cases} t, & 0<t\leq 1 \\ 2-t, & 1<t\leq 2 \end{cases}$.

Решење: Ако је $F=L[f]$, онда је

$$F(s)=\frac{1}{1-e^{-2s}}\int_0^2 e^{-st}f(t)dt=\frac{1}{1-e^{-2s}}\left(\int_0^1 te^{-ts}dt+\int_1^2(2-t)e^{-ts}dt\right).$$

Како је

$$\int_0^1 te^{-ts}dt=-\frac{1}{s}e^{-s}-\frac{1}{s^2}e^{-s}+\frac{1}{s^2},\quad \int_1^2(2-t)e^{-ts}dt=\frac{1}{s}e^{-s}+\frac{1}{s^2}e^{-2s}-\frac{1}{s^2}e^{-s},$$

то је

$$F(s)=\frac{1}{1-e^{-2s}}\left(\frac{1}{s^2}e^{-2s}-\frac{2}{s^2}e^{-s}+\frac{1}{s^2}\right)=\frac{1}{s^2}\frac{(1-e^{-s})^2}{1-e^{-2s}}=\frac{1}{s^2}tanh\ s.$$

# Лапласова трансформације - дефиниција и особине

Задатак за самостални рад:

Одредити $L[f]$ ако је $f(t) = t^2 ch(at)\ (a \in R)$.

Резултат:

$$F(s) = (-1)^2 \left(\frac{s}{s^2 - a^2}\right)'' = 2s \cdot \frac{s^2 + 3a^2}{(s^2 - a^2)^3}.$$

Задатак за самостални рад:

Одредити $L[f]$ ако је $f(t) = \int_0^t e^{-x}(t-x)\, sin\, x dx.$

Резултат:

$$L[f](s) = \frac{1}{(s+1)^2 + 1} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{1}{s^2(s^2 + 2s + 2)}.$$

# Математика 3 - вежбе

ФОН

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
ФАКУЛТЕТ ОРГАНИЗАЦИОНИХ НАУКА

Небојша Николић