Математика 3 - вежбе

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
ФАКУЛТЕТ ОРГАНИЗАЦИОНИХ НАУКА

Небојша Николић

Примена Лапласове трансформације

ПРИМЕНА ЛАПЛАСОВЕ ТРАНСФОРМАЦИЈЕ

У наредним задацима ћемо видети да се Лапласова трансформација може успешно применити за решавање диференцијалних једначина, система диференцијалних једначина, интегралних једначина, система интегралних једначина итд. Суштина је у томе да се дата једначина (систем) Лапласовом трансформацијом преслика у алгебарску једначину, коју много лакше решавамо, а затим добијено решење алгебарске једначине (система) „врати" у решење диференцијалне једначине (система) помоћу инверзне Лапласове трансформације.

Од посебног интереса ће нам бити решавање Кошијевог проблема линеарне диференцијалне једначине (система), са константним коефицијентима.

1. Одредити партикуларно решење једначине

$$y''(t) - 4y'(t) + 5y(t) = 5t + 1$$

које задовољава услове $y(0) = 2$ и $y'(0) = 2$.

Решење: Нека је $L[y] = Y$. Тада је

$$L[y'](s) = sY(s) - y(0) = sY - 2$$

$$L[y''](s) = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) = s^2Y - 2s - 2.$$

Из дате једначине добијамо да је

$$Y(s) = \frac{2s^3 - 6s^2 + s + 5}{s^2(s^2 - 4s + 5)} = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s} + \frac{s - 3}{s^2 - 4s + 5},$$

па је

$$y(t) = L^{-1}[Y](t) = t + 1 + e^{2t} \cos t - e^{2t} \sin t.$$

2. Решити Кошијев проблем

$$y''(t) + 4y(t) = f(t), \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1,$$

где је $f(t) = 1$ за $0 < t < 1$ и $f(t) = 0$ за $t \geq 1$.

Решење: Како је $f(t) = u(t) - u(t-1)$, где је u јединична одскочна функција, из дате једначине добијамо да је

$$Y(s) = \frac{1}{s^2+4} + \frac{1-e^{-s}}{s(s^2+4)} = \frac{1}{2}\frac{2}{s^2+4} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+4}\right) - \frac{e^{-s}}{4}\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+4}\right).$$

Према томе,

$$y(t) = \frac{1}{2}\,sin\,2t + \frac{1}{4}(1 - cos\,2t) - \frac{1}{4}(1 - 2\,cos\,2(t-1))u(t-1).$$

3. Одредити опште решење једначине

$$y''(t) + 4y'(t) + 4y(t) = e^{-2t}(\cos t + 2\sin t).$$

Решење: Ако је $L[y] = Y$, $y(0) = A$ и $y'(0) = B$, онда је

$$L[y'](s) = sY(s) - A, \quad L[y''](s) = s^2Y - sA - B,$$

па из дате једначине добијамо да је

$$Y(s)(s^2 + 4s + 4) - As - 4A - B = \frac{s+4}{(s+2)^2 + 1},$$

односно

$$Y(s) = U(s) + V(s),$$

где је

$$U(s) = \frac{As + 4A + B}{(s+2)^2}, \quad V(s) = \frac{s+4}{(s+2)^2\left((s+2)^2 + 1\right)}.$$

Примена Лапласове трансформације

где је $C_1 = A + 1$ и $C_2 = 2A + B + 2$. Према томе,

$$
\begin{aligned}
y(t) &= L^{-1}[Y](t) \\
&= C_1 e^{-2t} + C_2 t e^{-2t} - e^{-2t}(\cos t + 2 \sin t).
\end{aligned}
$$

4. Одредити партикуларно решење система диференцијалних једначина

$$x'(t) - y(t) = e^t, \quad y'(t) + x(t) = sin\, t$$

које задовољава услове $x(0) = 1$ и $y(0) = 0$.

Решење: Ако је $L[x] = X$ и $L[y] = Y$, онда из датог система добијамо систем

$$sX(s) - Y(s) = \frac{1}{s-1} + 1, \quad X + sY(s) = \frac{1}{s^2+1}.$$

Решавањем овог система налазимо да је

$$X(s) = \frac{s}{(s-1)(s^2+1)} + \frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{(s^2+1)^2},$$

$$Y(s) = -\frac{1}{(s-1)(s^2+1)} - \frac{1}{s^2+1} + \frac{s}{(s^2+1)^2},$$

односно

$$X(s) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-1} + \frac{1}{s^2+1} + \frac{s}{s^2+1} + \frac{2}{(s^2+1)^2}\right),$$

Примена Лапласове трансформације

$$Y(s) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s^2+1} + \frac{s}{s^2+1} + \frac{2s}{(s^2+1)^2}\right),$$

па је тражено партикуларно решење

$$x(t) = \frac{1}{2}\left(e^t + 2\,sin\,t + cos\,t - t\,cos\,t\right), \quad y(t) = \frac{1}{2}\left(-e^t - sin\,t + cos\,t + t\,sin\,t\right).$$

5. Решити Кошијев проблем за систем диференцијалних једначина

$$x''(t) + x'(t) + y''(t) - y(t) = e^{t}$$
$$x'(t) + 2x(t) - y'(t) + y(t) = e^{-t}$$

и почетне услове $x(0) = y(0) = y'(0) = 0$ и $x'(0) = 1$.

Решење: Ако је $L[x] = X$ и $L[y] = Y$, онда из датог система диференцијалних једначина добијамо систем алгебарских једначина

$$(s^2 + s)X + (s^2 - 1)Y = 1 + \frac{1}{s-1}$$
$$(s+2)X + (-s+1)Y = \frac{1}{s+1}.$$

Решавањем овог система налазимо да је

$$X(s) = \frac{2s-1}{2(s-1)(s+1)^2}, \quad Y(s) = \frac{3s}{2(s^2-1)^2}.$$

Примена Лапласове трансформације

Из једнакости

$$X(s) = \frac{1}{8}\frac{1}{s-1} + \frac{3}{4}\frac{1}{(s+1)^2} - \frac{1}{8}\frac{1}{s+1}$$

имамо да је

$$x(t) = L^{-1}[X](t) = \frac{1}{4}sht + \frac{3}{4}te^{-t},$$

а из једнакости

$$L[tsht](s) = \frac{2s}{(s^2-1)^2}$$

следи да је $y(t) = \frac{3}{4}tsht$. Према томе, решење датог Кошијев проблема су функције $x : [0, +\infty) \mapsto R$ и $y : [0, +\infty) \mapsto R$ дефинисане једнакостима

$$x(t) = \frac{1}{4}sht + \frac{3}{4}te^{-t}, \quad y(t) = \frac{3}{4}tsht.$$

6. Решити једначину

$$\int_0^t sin(t-u)y(u)du = sin^2 t.$$

Решење: Како је $\int_0^t sin(t-u)y(u)du = (sin * y)(t)$, из дате једначине следи

$$Y(s)\cdot\frac{1}{s^2+1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s} - \frac{1}{2}\cdot\frac{s}{s^2+4},$$

где је $Y = L[y]$. Према томе, $Y(s) = \dfrac{1}{2s} + \dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{s}{s^2+4}$, па је $y(t) = (1+3\,cos\,2t)/2$.

7. Решити систем једначина

$$x(t) = t + \int_0^t y(u)du, \quad y(t) = 1 + \int_0^t x(u)du.$$

Решење: Ако је $L[x] = X$ и $L[y] = Y$, из датог система добијамо систем

$$X = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s}Y, \quad Y = \frac{1}{s} + \frac{1}{s}X$$

из којег следи да је

$$X(s) = \frac{2}{s^2 - 1}, \quad Y(s) = -\frac{1}{s} + \frac{2s}{s^2 - 1}.$$

Према томе, $x(t) = 2sht$ и $y(t) = 2cht - 1$.

8. Решити једначину

$$y'(t) + y(t) + \int_0^t (t - x + 1) y(x) dx = 0.$$

Решење: Ако $g : t \mapsto 1 + t$ и ако је $y'(0) = A$, онда из дате једначине следи да је $y' + y + g * y = 0$, па применом Лапласове трансформације добијамо да је

$$sY - A + Y + \left(\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s} \right) Y = 0,$$

односно

$$Y(s) = \frac{A}{2} \left(\frac{1}{s+1} + \frac{s-1}{s^2+1} \right).$$

Према томе, опште решење дате једначине је

$$y(t) = \frac{A}{2} \left(e^{-t} + cos\, t - sin\, t \right), \quad A \in R.$$

Задатак за самостални рад:

Одредити партикуларно решење једначине

$$y''(t) + a^2 y(t) = b\, sin\, at, \quad (a \in R,\ b \in R^+)$$

које задовољава услове $y(0) = 0$ и $y'(0) = 0$.

Резултат:

$$Y(s) = \frac{ab}{(s - ia)^2 (s + ia)^2},$$

$$y(t) = \frac{b}{2a^2}(sin\, at - at\, cos\, at).$$

Примена Лапласове трансформације

Задатак за самостални рад:

Решити једначину

$$y(t) = sin\, t + 2\int_0^t cos(t-x)y(x)dx.$$

Резултат:

$$Y(s) = \frac{1}{(s-1)^2}.\ \text{Према томе, } y(t) = te^t.$$

Математика 3 - вежбе

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
ФАКУЛТЕТ ОРГАНИЗАЦИОНИХ НАУКА

Небојша Николић