Математика 3 - вежбе

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
ФАКУЛТЕТ ОРГАНИЗАЦИОНИХ НАУКА

Небојша Николић

ИНВЕРЗНА ЛАПЛАСОВА ТРАНСФОРМАЦИЈА
- МЕЛИНОВА ФОРМУЛА -

Ако је $F(s)=\mathcal{L}[f(t)]$ онда је $f(t)=\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$, тј. $f(t)$ је инверзна Лапласова трансф. ф-је $F(s)$.
За налажење основних инверзних Лапласових трансформација користићемо табелу са основним особинама и табелу са основним Лапласовим трансформацијама. На пример, из особине 5. следи: ако је $\mathcal{L}^{-1}[F(s)]=f(t)$ тада је $\mathcal{L}^{-1}[F'(s)]=-tf(t)$. Или, из основне Лапласове трансформације $\mathcal{L}[\sin bt]=\frac{b}{s^2+b^2}$ следи да је $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+b^2}\right]=\frac{\sin bt}{b}$, итд.

Такође, сложену рационалну ф-ју $\frac{P(s)}{Q(s)}$ можемо раставити на збир простих рационалних ф-ја облика $\frac{A_1}{s-a}, \frac{A_2}{(s-a)^2}, \dots, \frac{A_1 s+B_1}{(s-\alpha)^2+\beta^2}, \frac{A_2 s+B_2}{((s-\alpha)^2+\beta^2)^2}, \dots$ (методом неодређених коефицијената), а затим наћи инверзну Лапласову трансформацију сваке просте рационалне ф-је.
Често се користи особина конволуције за налажење инверзне Лапласове трансформације: ако је $F(s)=F_1(s)\cdot F_2(s)$ тада је $\mathcal{L}^{-1}[F(s)]=f_1(t)*f_2(t)=\int_0^t f_1(x)f_2(t-x)\,dx$, где је $f_1(t)=\mathcal{L}^{-1}[F_1(s)]$ и $f_2(t)=\mathcal{L}^{-1}[F_2(s)]$.

Инверзна Лапласова трансформација
Мелинова формула

Под одређеним условима (видети предавања) функције $F(s)=\mathcal{L}[f(t)]$, доказује се да важи Мелинова формула $f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{st}\cdot F(s)\,ds$, за $t>0$.

Користећи Мелинову ф-лу, инверзна Лапласова трансформација се може рачунати по формули $f(t)=\mathcal{L}^{-1}[F(s)]=\sum\limits_{i=1}^{k}\operatorname*{Res}\limits_{s=s_i}(e^{st}F(s))$, где су $s_1,\dots,s_k$ сви (изоловани) сингуларитети ф-је $F(s)$ у области $\operatorname{Re} s\leq a$.

На пример: $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-a}\right]=\sum\limits_{i=1}^{k}\operatorname*{Res}\limits_{s=s_i}\left(e^{st}\cdot\frac{1}{s-a}\right)=\operatorname*{Res}\limits_{s=a}\left(\frac{e^{st}}{s-a}\right)=\lim\limits_{s\to a}\cancel{(s-a)}\cdot\frac{e^{st}}{\cancel{s-a}}=e^{at}$.

ЗАДАТАК 1. Израчунати $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+4}\right]$.

Решење: Из $\mathcal{L}[\sin 2t]=\frac{2}{s^2+2^2}=\frac{2}{s^2+4}$ следи $\mathcal{L}\left[\frac{1}{2}\sin 2t\right]=\frac{1}{s^2+4}$, тј. $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+4}\right]=\frac{\sin 2t}{2}$.

ЗАДАТАК 2. Израчунати $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+6s+13}\right]$.

Решење: Из $\frac{1}{s^2+6s+13}=\frac{1}{(s+3)^2+4}$ следи $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+6s+13}\right]=e^{-3t}\cdot\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+4}\right]=e^{-3t}\cdot\frac{\sin 2t}{2}$.

Инверзна Лапласова трансформација
Мелинова формула

ЗАДАТАК 3. Израчунати $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2-2s+5}\right]$.

Решење: Из $\frac{s}{s^2-2s+5}=\frac{s-1+1}{(s-1)^2+4}=\frac{s-1}{(s-1)^2+4}+\frac{1}{(s-1)^2+4}$ следи $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2-2s+5}\right]=e^t\cdot\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+4}\right]+e^t\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+4}\right]=$

$=e^t\left(\cos 2t+\frac{\sin 2t}{2}\right)$

ЗАДАТАК 4. Израчунати $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2+4)}\right]$ и $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2(s^2+4)}\right]$

Решење: I начин) $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2+4)}\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\frac{1}{s^2+4}}{s}\right]=\int_0^t\frac{\sin 2x}{2}dx=\ldots=\frac{1-\cos 2t}{4}$

$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2(s^2+4)}\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\frac{1}{s(s^2+4)}}{s}\right]=\int_0^t\frac{1-\cos 2x}{4}dx=\ldots=\frac{2t-\sin 2t}{8}$

II начин) $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s^2+4}\right]=1*\frac{\sin 2t}{2}=\int_0^t 1\cdot\frac{\sin 2x}{2}dx=\ldots=\frac{1-\cos 2t}{4}$

$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\cdot\frac{1}{s^2+4}\right]=t*\frac{\sin 2t}{2}=\int_0^t(t-x)\cdot\frac{\sin 2x}{2}dx=\ldots=\frac{2t-\sin 2t}{8}$

III начин) $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2+4)}\right]=\ldots=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1/4}{s}-\frac{1/4\cdot s}{s^2+4}\right]=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\cos 2t=\frac{1-\cos 2t}{4}$

$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2(s^2+4)}\right]=\ldots=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1/4}{s^2}-\frac{1/4}{s^2+4}\right]=\frac{1}{4}t-\frac{1}{4}\frac{\sin 2t}{2}=\frac{2t-\sin 2t}{8}$

5.

Одредити $L^{-1}[F]$ ако је $F(s) = \dfrac{2s-3}{(s-1)(s^2+4s+5)}$.

Решење: Како је

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{s-1} - \frac{1}{10}\cdot\frac{s}{s^2+4s+5} + \frac{7}{2}\cdot\frac{1}{s^2+4s+5} \\ &= \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{s-1} - \frac{1}{10}\cdot\frac{s+2}{(s+2)^2+1} + \frac{37}{10}\cdot\frac{1}{(s+2)^2+1} \end{aligned}$$

то је

$$L^{-1}[F](t) = \frac{1}{10}e^{t} - \frac{1}{10}e^{-2t}\,cos\,t + \frac{37}{10}e^{-2t}\,sin\,t.$$

Инверзна Лапласова трансформација
Мелинова формула

6.

Одредити $L^{-1}[X]$ ако је $X(s) = \dfrac{1}{s^3 - 8}$.

Решење: Како је

$$X(s) = \frac{1}{12}\cdot\frac{1}{s-2} - \frac{1}{12}\cdot\frac{s+4}{s^2+2s+4}$$
$$= \frac{1}{12}\cdot\frac{1}{s-2} - \frac{1}{12}\cdot\frac{(s+1)+3}{(s+1)^2+(\sqrt{3})^2}$$
$$= \frac{1}{12}\cdot\frac{1}{s-2} - \frac{1}{12}\cdot\frac{s+1}{(s+1)^2+(\sqrt{3})^2} - \frac{\sqrt{3}}{12}\cdot\frac{\sqrt{3}}{(s+1)^2+(\sqrt{3})^2}$$

то је

$$L^{-1}[X](t) = \frac{1}{12}e^{2t} - \frac{1}{12}e^{-t}\left(cos\,\sqrt{3}t + \sqrt{3}\,sin\,\sqrt{3}t\right).$$

7.

Одредити $L^{-1}[X]$ ако је $X(s) = \dfrac{s^2+1}{s^3-1}$.

Решење: Како је

$$X(s) = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{s-1} + \frac{1}{3}\cdot\frac{s-1}{s^2+s+1}$$

$$= \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{s-1} + \frac{1}{3}\cdot\frac{s+\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}},$$

то је

$$L^{-1}[X](t) = \frac{2}{3}e^{t} + \frac{1}{3}e^{-t/2}\,cos\,\frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-t/2}\,sin\,\frac{\sqrt{3}}{2}t.$$

8.

Одредити $L^{-1}[F]$ ако је $F(s) = \dfrac{e^{-2s}}{s(s^2+1)^2}$.

Решење: Ако је $G(s) = \dfrac{1}{s(s^2+1)^2}$ и $L^{-1}[G] = g$, онда је $F(s) = e^{-2s}G(s)$
$f(t) = g(t-2)u(t-2)$, где је u јединична одскочна функција. Како је

$$G(s) = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1} - \frac{s}{(s^2+1)^2},$$

то је $g(t) = 1 - cos\, t - \dfrac{1}{2} t\, sin\, t$, односно

$$f(t) = \left(1 - cos(t-2) - \frac{1}{2}(t-2)\, sin(t-2)u\right) u(t-2).$$

9.

Одредити $L^{-1}[F]$ ако је $F(s) = \dfrac{s^2}{(s^2+a^2)^2}$.

Решење: Нека је $f(t) = L^{-1}[F](t)$, $g(t) = \cos at$ и $G = L[g]$.

Тада је $F(s) = G(s) \cdot G(s)$, па је

$$\begin{aligned} f(t) = (g * g)(t) &= \int_0^t \cos a(t-u) \cos au\,du \\ &= \frac{1}{2} \int_0^t (\cos at + \cos(2au - at)du \\ &= \frac{1}{2}\left(t\cos at + \frac{1}{a} \sin at \right). \end{aligned}$$

10.

Одредити $L^{-1}[F]$ ако је $F(s) = \dfrac{1}{s^3(s-1)}$.

Решење: Нека је $f(t) = L^{-1}[F](t)$, $g(t) = t^2$, $h(t) = e^t$, $G = L[g]$ и $H = L[h]$
Тада је $F(s) = G(s) \cdot H(s)/2$, па је

$$
\begin{aligned}
f(t) = \frac{1}{2}(g * h)(t) &= \frac{1}{2}\int_0^t (t-x)^2 e^x dx \\
&= \frac{1}{2} e^x (t-x)^2 \Big|_0^t + \int_0^t (t-x) e^x dx \\
&= -\frac{t^2}{2} - t + e^t - 1.
\end{aligned}
$$

Напомена: Ако је $E(s) = e^{st}F(s)$, онда је

$$f(t) = \operatorname*{res}_{s=0} E(s) + \operatorname*{res}_{s=1} E(s).$$

Наравно, f може да се добије и из једнакости

$$F(s) = \frac{A}{s^3} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s} + \frac{D}{s-1}.$$

Инверзна Лапласова трансформација
Мелинова формула

11. Одредити $L^{-1}[F]$ ако je $F(s) = \dfrac{1}{(s^2+1)^3}$.

Решење: Нека je $f = L^{-1}[F]$ и $g = L^{-1}[G]$, где je $G(s) = \dfrac{1}{(s^2+1)^2}$.

Тада je
$$
\begin{aligned}
g(t) = (sin * sin)(t) &= \int_0^t sin(t-u)\, sin\, u du \\
&= \frac{1}{2}\int_0^t cos(t-2u)du - \frac{1}{2}\int_0^t cos\, t du \\
&= \frac{1}{2}\, sin\, t - \frac{1}{2} t\, cos\, t
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(t) = (sin * g)(t) &= \frac{1}{2}\int_0^t sin(t-u)(sin\, u - u\cos u)du \\
&= \frac{1}{4}(sin\, t - t\, cos\, t) - \frac{1}{2}\int_0^t sin(t-u) u\, cos\, u du \\
&= \frac{3}{8}\, sin\, t - \frac{3}{8} t\, cos\, t - \frac{1}{8} t^2\, sin\, t.
\end{aligned}
$$

Инверзна Лапласова трансформација
Мелинова формула

12.

Одредити $L^{-1}[F]$ ако је $F(s) = \dfrac{s+2}{(s^2+4s+13)^2}$.

Решење: Како је

$$F(s) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2s+4}{(s^2+4s+13)^2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s^2+4s+13}\right)' = -\frac{1}{6}\left(\frac{3}{(s+2)^2+3^2}\right)'$$

то је $L^{-1}[F](t) = \dfrac{1}{6} t e^{-2t} \sin 3t$.

13. Одредити $L^{-1}[F]$ ако је $F(s) = \dfrac{1}{s^2(s^2+a^2)}$.

Решење: Ако је $G(s) = \dfrac{1}{s(s^2+a^2)}$, онда је

$$L^{-1}[G](t) = \frac{1}{a}\int_0^t sin\, ax dx = \frac{1}{a^2}(1 - cos\, at),$$

па је

$$L^{-1}[F](t) = \frac{1}{a^2}\int_0^t (1 - cos\, ax)dx = \frac{1}{a^2}\left(t - \frac{1}{a}\, sin\, at\right).$$

Друго решење: Резултат следи из једнакости

$$F(s) = \frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+a^2}\right).$$

Инверзна Лапласова трансформација
Мелинова формула

Треће решење: Ако је $G(s) = F(s)\cdot e^{st}$, онда је

$$L^{-1}[F](t) = \underset{s=0}{res}\, G(s) + \underset{s=ai}{res}\, G(s) + \underset{s=-ai}{res}\, G(s)$$

$$= \lim_{s\to 0}\left(\frac{e^{st}}{s^2+a^2}\right)' + \lim_{s\to ai}\frac{e^{st}}{s^2(s+ai)} + \lim_{s\to -ai}\frac{e^{st}}{s^2(s-ai)}$$

$$= \frac{t}{a^2} - \frac{1}{a^3}\left(\frac{e^{ati}-e^{ati}}{2i}\right)$$

$$= \frac{t}{a^2} - \frac{1}{a^3}\, sin\, at.$$

14.

Ако је $F(s) = \dfrac{A(s)}{B(s)}$, где су A и B полиноми степена m и n ($m < n$) и ако су комплексни бројеви $s_1, s_2, \ldots, s_n$ једноструки корени полинома B, доказати да је

$$L^{-1}[F](t) = \sum_{k=i}^{n} \frac{A(s_k)}{B'(s_k)} e^{s_k t}.$$

Решење: Нека је $F(s) = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{c_k}{s - s_k}$. Тада је

$$c_k = \lim_{s \to s_k} (s - s_k) \frac{A(s)}{B(s)} = A(s_k) \lim_{s \to s_k} \frac{s - s_k}{B(s) - B(s_k)} = \frac{A(s_k)}{B'(s_k)},$$

па је

$$L^{-1}[F](t) = \sum_{k=1}^{n} c_k e^{s_k t} = \sum_{k=1}^{n} \frac{A(s_k)}{B'(s_k)} e^{s_k t},$$

што је и требало доказати.

15.

Одредити $L^{-1}[F]$ ако је $F(s) = \dfrac{s+1}{s(s-1)(s-2)(s-3)}$.

Решење: Нека је $A(s) = s+1$ и $B(s) = s(s-1)(s-2)(s-3)$. Тада је

$$B'(s) = 4s^3 - 18s^2 + 22s - 6$$

$$\frac{A(0)}{B'(0)} = -\frac{1}{6}, \quad \frac{A(1)}{B'(1)} = 1, \quad \frac{A(2)}{B'(2)} = -\frac{3}{2}, \quad \frac{A(3)}{B'(3)} = \frac{2}{3},$$

па је (према претходном задатку)

$$L^{-1}[F](t) = -\frac{1}{6} + e^t - \frac{3}{2}e^{2t} + \frac{2}{3}e^{3t}.$$

Напомена: Ако је $G(s) = e^{st}F(s)$, онда је (без позивања на претходни задатак)

$$\begin{aligned} L^{-1}[F](t) &= \operatorname*{res}_{s=0} G(s) + \operatorname*{res}_{s=1} G(s) + \operatorname*{res}_{s=2} G(s) + \operatorname*{res}_{s=3} G(s) \\ &= -\frac{1}{6} + e^t - \frac{3}{2}e^{2t} + \frac{2}{3}e^{3t}. \end{aligned}$$

Задатак за самостални рад:

$$\text{Одредити } L^{-1}[F] \text{ ако је } F(s) = \frac{s^2}{(s^3+1)^2}.$$

Резултат:

$$L^{-1}[F](t) = \frac{1}{9}t\left(e^{-t} - e^{t/2}\,cos\,\frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{3}{2}e^{t/2}\,sin\,\frac{\sqrt{3}}{2}t\right).$$

Задатак за самостални рад:

Одредити $L^{-1}[F]$ ако је $F(s) = \dfrac{1}{(s^2+1)^3}$.

Резултат:

$$g(t) = (sin * sin)(t) = \frac{1}{2}\, sin\, t - \frac{1}{2} t\, cos\, t$$

$$f(t) = (sin * g)(t) = \frac{3}{8}\, sin\, t - \frac{3}{8} t\, cos\, t - \frac{1}{8} t^2\, sin\, t.$$

Математика 3 - вежбе

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
ФАКУЛТЕТ ОРГАНИЗАЦИОНИХ НАУКА

Небојша Николић