Математика 3 - вежбе

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
ФАКУЛТЕТ ОРГАНИЗАЦИОНИХ НАУКА

Небојша Николић

ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ ПРВОГ РЕДА
– ОПШТЕ И СИНГУЛАРНО РЕШЕЊЕ –

$y=y(x)$ – реална функција реалне променљиве x

$y'=y'(x), y''=y''(x), \ldots, y^{(n)}=y^{(n)}(x)$ – изводи, до n-тог реда, те ф-је

$\Rightarrow F(x,y,y',\ldots,y^{(n)})=0$ – диференцијална једначина n-тог реда

$\varphi(x,y,C_1,\ldots,C_n)=0$ – опште решење те диф. једначине ($C_1=const, \ldots, C_n=const$)

$\Rightarrow F(x,y,y')=0$ – диференцијална једначина 1. реда (или $y'=f(x,y)$)

$\varphi(x,y,C_1)=0$ – опште решење те диф. једначине (или $y=\psi(x,C_1)$)

ПРИМЕР 1. $y'=0$ је диф. јед. 1. реда

$\Rightarrow$ $y=C$; $C=const.$ је опште решење те диф. јед.

$\Rightarrow$ $y=1$, $y=\sqrt{2}$, $y=\pi$, ... су нека партикуларна решења

ПРИМЕР 2. $y'=5$ је диф. јед. 1. реда

$\Rightarrow$ $y=5x+C$ је опште, $y=5x-1$, $y=5x+e$ су партикуларна реш.

ЗАДАТАК 1. Доказати да је $y=2cx+c^2$ опште реш. диф. јед. $y'^2+4xy'=4y$.

Решење: Проверавамо да ли $y=2cx+c^2$ задовољава дату диф. једначину.

Како је $y'=2c$ имамо: $(2c)^2+4x\cdot 2c=4\cdot(2cx+c^2)$

$\Leftrightarrow 4c^2+8cx=8cx+4c^2$

$\Leftrightarrow 0=0$, што је тачно.

Како $y=2cx+c^2$ садржи једну константу и задовољава дату јед., $y=2cx+c^2$ представља опште решење дате диф. једначине.

НАПОМЕНА: Може се десити да постоји решење диф. једначине које се не може добити из општег решења, ни за коју вредност константе C. Такво решење зовемо сингуларним решењем.

ЗАДАТАК 2. Доказати да је $x^2=C(y-C)$, $C\neq 0$, опште решење, а да су $y=2x$ и $y=-2x$ сингуларна решења једначине $xy'^2-2yy'+4x=0$.

Решење: Из $x^2=C(y-C)$ следи $y=\frac{x^2}{C}+C$ и $y'=\frac{2x}{C}$. Заменом у дату диф. једначину добијамо: $x\cdot\left(\frac{2x}{C}\right)^2-2\left(\frac{x^2}{C}+C\right)\cdot\frac{2x}{C}+4x=0$

$$\Leftrightarrow x\cdot\frac{4x^2}{C^2}-\frac{4x}{C}\cdot\frac{x^2+C^2}{C}+4x=0$$

$$\Leftrightarrow 4\frac{x^3}{C^2}-4\frac{x^3}{C^2}-4\frac{xC^2}{C^2}+4x=0$$

$$\Leftrightarrow 0=0$$

Значи, $x^2=C(y-C)$ задовољава дату диф. једначину. С обзиром да у том решењу фигурише константа C, то је опште решење.

На сличан начин проверавамо да је $y=2x$ решење дате једначине: $x\cdot 2^2-2\cdot 2x\cdot 2+4x=0 \Leftrightarrow 0=0$, јер је $y'=2$. Слично и за $y=-2x$.

Значи, $y=2x$ и $y=-2x$ су решења која се не могу добити из општег решења ($y=\frac{x^2}{C}+C$ је полином 2. степена), па представљају сингуларна решења датог система.

НАПОМЕНА: С обзиром да је $y'=\frac{dy}{dx}$, $dx\neq 0$ и $x'=\frac{dx}{dy}$, $dy\neq 0$, диференцијална јед. првог реда се може задати у облику $F(y,x,x')=0$ $(x=x(y))$ или у облику $P(x,y)\cdot dx+Q(x,y)\cdot dy=0$ $\left(\Leftrightarrow y'=\frac{dy}{dx}=-\frac{P(x,y)}{Q(x,y)},\ Q(x,y)\neq 0\right)$.

ЗАДАТАК 3. Доказати да је $\ln x\cdot\ln y=C$ опште решење диф. јед. $y\ln y\cdot dx+x\cdot\ln x\cdot dy=0$ и одредити партикуларно решење за које важи $y(e)=e$.

Решење: Диференцирањем израза $\ln x\cdot\ln y=C$ добијамо: $d(\ln x\cdot\ln y)=d(C)\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{x}\ln y\cdot dx+\frac{1}{y}\ln x\cdot dy=0 \ /\cdot xy \Rightarrow y\ln y\,dx+x\ln x\,dy=0$, што значи да $\ln x\cdot\ln y=C$ задовољава дату диференцијалну једначину и да представља њено опште решење (садржи константу C).

Заменом услова $y(e)=e$, тј. $x=e$ и $y=e$ у опште решење добијамо:

$\ln e\cdot\ln e=C \Leftrightarrow 1\cdot 1=C$, тј. $C=1$. Враћањем добијене константе у опште решење, добијамо тражено партикуларно решење:

$\ln x\cdot\ln y=1$.

ЈЕДНАЧИНЕ СА РАЗДВОЈЕНИМ ПРОМЕНЉИВИМА

Диференцијалну једначину $y'=f(x)\cdot g(y) \Leftrightarrow \frac{dy}{g(y)}=f(x)\cdot dx$, $g(y)\neq 0$ зовемо јед. са раздвојеним променљивима. Решавамо је интеграљењем последње једнакости, тј. $\int\frac{dy}{g(y)}=\int f(x)dx \Rightarrow \ldots \Rightarrow G(y)+C_1=F(x)+C_2 \Leftrightarrow G(y)-F(x)=C$, $C=C_2-C_1=const.$

Задатак 4. Решити диф. једначину $(1+e^x)yy'=e^x$.

Решење: Раздвајањем променљивих у једначини $(1+e^x)\cdot y\cdot\frac{dy}{dx}=e^x$, добијамо

$ydy=\frac{e^x}{1+e^x}dx$. Сада можемо да интегралимо леву и десну страну:

$\int ydy=\int\frac{e^x}{1+e^x}dx \Rightarrow \frac{y^2}{2}=\int\frac{dt}{t}$, $t=1+e^x \Rightarrow \frac{y^2}{2}=\ln|t|+C_1$ (довољно је додати константу на један $\int$)

$\Rightarrow y^2=2\ln(1+e^x)+2C_1 \Leftrightarrow \underline{y^2=2\ln(1+e^x)+C}$, $C=2C_1$ је опште решење.

ЗАДАТАК 5. Одредити партикуларно решење диф. једначине $2y' = \cos(x-y) - \cos(x+y)$ које задовољава услов $y(0) = \frac{\pi}{2}$.

НАПОМЕНА: Проблем налажења партикуларног реш. под условом $y(x_0) = y_0$ зовемо Кошијев пр.

Решење: Најпре налазимо опште решење. Из $y' = \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2}$ следи $y' = \sin x \cdot \sin y$, на основу познате формуле за трансформацију разлике у производ тригонометријских ф-ја. Након раздвајања променљивих добијамо $\frac{dy}{\sin y} = \sin x\, dx$, па је $\int \frac{dy}{\sin y} = \int \sin x\, dx \Rightarrow (\text{смена } t = \operatorname{tg}\frac{y}{2}) \Rightarrow \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = -\cos x \Rightarrow$
$\Rightarrow \int \frac{dt}{t} = -\cos x \Rightarrow \ln|t| = -\cos x + C \Leftrightarrow \underline{\cos x + \ln|\operatorname{tg}\frac{y}{2}| = C}$ опште решење.

Заменом $x=0, y=\frac{\pi}{2}$ у опште решење, добијамо $\cos 0 + \ln|\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}| = C$, тј. $C = 1 + \ln 1 = 1$. Враћањем константе у опште добијамо тражено партикуларно решење: $\underline{\cos x + \ln|\operatorname{tg}\frac{y}{2}| = 1}$.

ЗАДАТАК ЗА САМОСТАЛНИ РАД: Одговарајућом сменом диференцијалну јед. $(x+y+1)dx+(2x+2y-1)dy=0$ свести на једначину са раздвојеним променљивима, а затим решити једначину.

Упутство: Увести смену $z=x+y$ у једначину $y'=-\frac{x+y+1}{2(x+y)-1}$. С обзиром да је $y=y(x)$ и $z=z(x)$, биће $z'=1+y'$ итд.

Резултат: $x+2y+3\ln|x+y-2|=C$.

ХОМОГЕНЕ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ

Једначину облика $y'=f\left(\frac{y}{x}\right)$ зовемо хомогена диф. јед. првог реда. Решавамо је сменом $z=\frac{y}{x}$ (одакле је $y=z\cdot x$, тј. $y'=z'x+z$).

НАПОМЕНА: Једначина $x'=g\left(\frac{x}{y}\right)$ је такође хомогена диф. једначина (смена $z=\frac{x}{y}$).

ЗАДАТАК 6. Решити диф. једначину $y'=e^{\frac{y}{x}}+\frac{y}{x}+1$.

Решење: Сменом $z=\frac{y}{x}$, тј. $y=zx$ и $y'=z'x+z$, добијамо $z'x+\cancel{z}=e^{z}+\cancel{z}+1$, тј. $\frac{dz}{dx}\cdot x=e^{z}+1$. Након раздвајања променљивих и интеграљења имамо:

$$\int\frac{dz}{e^{z}+1}=\int\frac{dx}{x}\Rightarrow(\text{смена } e^{z}=t)\Rightarrow\int\frac{dt}{t(t+1)}=\ln|x|\Rightarrow\int\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)dt=\ln|x|\Rightarrow$$

$$\ln|t|-\ln|t+1|+C=\ln|x|\Rightarrow C=\ln|x|+\ln|t+1|-\ln|t|\Rightarrow C=\ln\left|\frac{x(t+1)}{t}\right|.$$

Након враћања смена добијамо $\ln\left|\frac{x(e^{z}+1)}{e^{z}}\right|=C\Rightarrow\ln\left|\frac{x(e^{\frac{y}{x}}+1)}{e^{y/x}}\right|=C$, тј. опште реш.

Још једноставније: $\frac{x(e^{\frac{y}{x}}+1)}{e^{y/x}}=e^{C}=C_1\Rightarrow \underline{x(e^{y/x}+1)=C_1\cdot e^{y/x}}$.

ЗАДАТАК 7. Одредити партикуларно решење диф. једначине $(xy'-y)\cdot \operatorname{arctg}\frac{y}{x}=x$, које задовољава услов $y(1)=0$.

Решење: Одредимо најпре опште решење. Дељењем полазне једначине са $x\neq 0$ добијамо $\left(y'-\frac{y}{x}\right)\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=1$, тј. хомогену диф. јед. (облика $f(y', \frac{y}{x})=0$). Сменом $z=\frac{y}{x}$ ($y=zx$ и $y'=z'x+z$) добијамо $(z'x+\cancel{z}-\cancel{z})\cdot\operatorname{arctg}z=1$, тј. $\frac{dz}{dx}\cdot x\cdot\operatorname{arctg}z=1 \Rightarrow \operatorname{arctg}z\cdot dz=\frac{dx}{x} \Rightarrow \int\operatorname{arctg}z\cdot dz=\int\frac{dx}{x} \Rightarrow \left(\begin{matrix}u=\operatorname{arctg}z\\ dv=dz\end{matrix}\right)$ $\Rightarrow z\cdot\operatorname{arctg}z-\int\frac{z\,dz}{1+z^2}=\ln|x| \Rightarrow$ (смена $1+z^2=t$) $\Rightarrow z\cdot\operatorname{arctg}z-\frac{1}{2}\ln(1+z^2)=\ln|x|+C \Rightarrow$ $\Rightarrow 2z\operatorname{arctg}z=\ln(1+z^2)+\ln x^2+C_1 \Leftrightarrow 2z\operatorname{arctg}z=\ln[(1+z^2)\cdot x^2]+C_1$. Након враћања смене $z=\frac{y}{x}$, добијамо опште решење $2\frac{y}{x}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=\ln(x^2+y^2)+C_1$.

Заменом датог услова $(x=1, y=0)$ у опште решење добијамо $2\cdot 0\cdot\operatorname{arctg}0=\ln(0+1)+C_1$, тј. $C_1=0$. Враћањем добијене константе у опште добијамо партикуларно решење $\underline{2\frac{y}{x}\cdot\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=\ln(x^2+y^2)}$.

ЗАДАТАК 8. Одговарајућом сменом једначину $y'=\frac{x+y-3}{x-y-1}$ свести на хомогену, а затим је решити.

Решење: Идеја је да променљиву x и ф-ју y треба „померити" за константу ($x=x_1+\alpha$, $y=y_1+\beta$) тако да се дата диф. једначина трансформише у $y_1'=\frac{x_1+y_1}{x_1-y_1}$. Увођењем тих смена имамо $y_1'=\frac{(x_1+\alpha)+(y_1+\beta)-3}{(x_1+\alpha)-(y_1+\beta)-1}=\frac{x_1+y_1+(\alpha+\beta-3)}{x_1-y_1+(\alpha-\beta-1)}$, јер је $y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy_1}{dx_1}=y_1'$.
Значи, α и β ћемо изабрати као решење система $\left.\begin{array}{l}\alpha+\beta-3=0\\ \alpha-\beta-1=0\end{array}\right\}$. Није тешко видети да је решење $\alpha=2$, $\beta=1$, па су смене $x=x_1+2$, $y=y_1+1$.
Добијена једначина $y_1'=\frac{x_1+y_1}{x_1-y_1}=\frac{1+y_1/x_1}{1-y_1/x_1}$ је хомогена па се решава сменом $z=\frac{y_1}{x_1}$ ($y_1=zx_1$, $y_1'=z'x_1+z$). Добијемо $z'x_1+z=\frac{1+z}{1-z}\Rightarrow z'x_1=\frac{1+z}{1-z}-z=\frac{z^2+1}{1-z}$
$\Rightarrow \frac{dz}{dx_1}\cdot x_1=\frac{z^2+1}{1-z}\Rightarrow \frac{(1-z)dz}{z^2+1}=\frac{dx_1}{x_1}\Rightarrow \int\left(\frac{1}{z^2+1}-\frac{z}{z^2+1}\right)dz=\int\frac{dx_1}{x_1}$. Решавањем интеграла добија се $\operatorname{arctg} z-\frac{1}{2}\ln(z^2+1)=\ln|x_1|+C \Leftrightarrow 2\operatorname{arctg} z=\ln(z^2+1)\cdot x_1^2+C_1$, а након враћања смена $x=x_1+2$, $y=y_1+1$ и $z=\frac{y_1}{x_1}$ добићемо опште решење:

$$2\operatorname{arctg}\frac{y-1}{x-2}=\ln[(x-2)^2+(y-1)^2]+C_1.$$

ЗАДАТАК ЗА САМОСТАЛНИ РАД: Решити диф. једначину $(x^2+y^2)dx=2xydy$.

Резултат: Добија се хомогена диф. једначина $y'=\frac{1}{2}\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)$ чије је решење:

$$\ln\left|\frac{x^2-y^2}{x}\right|=C \Leftrightarrow \frac{x^2-y^2}{x}=\pm e^C=C_1 \Leftrightarrow \underline{x^2-y^2=C_1x}.$$

НАПОМЕНА: $x=0$ је сингуларно решење дате једначине.

ЗАДАТАК ЗА САМОСТАЛНИ РАД: Решити једначину $\left(2x\cdot \operatorname{sh}\frac{y}{x}+y\cdot \operatorname{ch}\frac{y}{x}\right)dx=x\cdot \operatorname{ch}\frac{y}{x}\cdot dy$.

НАПОМЕНА: $\operatorname{sh}(\cdot)$ и $\operatorname{ch}(\cdot)$ су хиперболичке ф-је („синус" и „косинус" хиперболички) и дефинишу се једнакостима $\operatorname{sh}t=\frac{e^t-e^{-t}}{2}$, $\operatorname{ch}t=\frac{e^t+e^{-t}}{2}$. Важе исте или сличне једнакости тригонометријским једнакостима: $\operatorname{ch}^2t-\operatorname{sh}^2t=1$, $\operatorname{sh}2t=2\operatorname{sh}t\cdot\operatorname{ch}t$, $\operatorname{ch}2t=\operatorname{sh}^2t+\operatorname{ch}^2t$, $\operatorname{sh}'t=\operatorname{ch}t$, $\operatorname{ch}'t=\operatorname{sh}t$, итд.

Резултат: $\ln\frac{\left|\operatorname{sh}\frac{y}{x}\right|}{x^2}=C \Rightarrow \frac{\left|\operatorname{sh}\frac{y}{x}\right|}{x^2}=e^C=C_1 \Rightarrow \underline{\operatorname{sh}\frac{y}{x}=C_1x^2}.$

Математика 3 - вежбе

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
ФАКУЛТЕТ ОРГАНИЗАЦИОНИХ НАУКА

Небојша Николић