Математика 3 - вежбе

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
ФАКУЛТЕТ ОРГАНИЗАЦИОНИХ НАУКА

Небојша Николић

ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ n-ТОГ РЕДА
ЈЕДНАЧИНЕ КОЈИМА СЕ МОЖЕ СНИЗИТИ РЕД.

На почетку смо рекли да је општи облик једначине n-тог реда $F(x,y,y',\dots,y^{(n)})=0$. Ако у једначини недостају y и евентуално $y',\dots,y^{(k-1)}$, ред ј-не $F(x,y^{(k)},\dots,y^{(n)})=0$ се може снизити сменом $z=y^{(k)}$ $(y=y(x), z=z(x))$. Добија се ј-на $F(x,z,\dots,z^{(n-k)})=0$.

ЗАДАТАК 1. Решити диф. једначину $xy''+y'-x^2=0$.

Решење: Пошто се у једначини не појављује $y=y(x)$, а појављује $y'=y'(x)$, ред ј-не ћемо смањити сменом $z=y'$, $z=z(x)$. Како је $z'=y''$, заменом у ј-ну добијамо $xz'+z-x^2=0 \Leftrightarrow z'+\frac{1}{x}z=x$, што је линеарна диф. једначина чије је решење $z=\frac{x^2}{3}+\frac{C_1}{x}$ (за вежбу). Враћањем смене $z=y'$ добијамо да је $y'=\frac{x^2}{3}+\frac{C_1}{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{x^2}{3}+\frac{C_1}{x}$
$\Rightarrow \int dy=\int\left(\frac{x^2}{3}+\frac{C_1}{x}\right)dx \Rightarrow y=\frac{1}{3}\frac{x^3}{3}+C_1\cdot\ln|x|+C_2 \Rightarrow \underline{y=\frac{x^3}{9}+C_1\ln|x|+C_2}$, што представља опште решење.

ЗАДАТАК 2. Решити диф. ј-ну $xy''=y'\cdot\ln\frac{y'}{x}$.

Решење: У једначини се не појављује ф-ја $y=y(x)$, па ћемо као и у прошлом задатку увести смену $z=y'$, $z=z(x)$. Заменом у ј-ну имамо $x\cdot z'=z\cdot\ln\frac{z}{x} \Rightarrow z'=\frac{z}{x}\cdot\ln\frac{z}{x}$, што је хомогена диф. једначина чије је решење $z=x\cdot e^{C_1x+1}$ (за вежбу). Враћањем смене $z=y'$ добијамо $y'=x\cdot e^{C_1x+1} \Rightarrow \int dy=\int xe^{C_1x+1}dx \Rightarrow (u=x,\ dv=e^{C_1x+1}dx) \Rightarrow \dots$
$\Rightarrow y=x\cdot\frac{e^{C_1x+1}}{C_1}-\frac{1}{C_1}\int e^{C_1x+1}dx \Rightarrow y=\frac{xe^{C_1x+1}}{C_1}-\frac{e^{C_1x+1}}{C_1^2}+C_2 \Rightarrow \underline{y=\frac{C_1x-1}{C_1^2}\cdot e^{C_1x+1}+C_2}$, што представља опште решење полазне једначине.

Ако се у ј-ни n-тог реда не појављује променљива x, ред ј-не $F(y,y',\dots,y^{(n)})=0$ се може снизити за један сменом $z=y'$ ($z=z(y)$, $y=y(x)$). С обзиром да је сада $z=z(y)$ ф-ја по променљивој y, биће: $y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=z'(y)\cdot y'(x)=z'\cdot z$. Другим речима, имаћемо смену $y'=z$, $y''=z'\cdot z$, где је $z=z(y)$.

ЗАДАТАК 3. Решити диф. једначину $y'' = y'^3 + y'$.

Решење: Обзиром да у j-ни недостаје променљива x, уводимо смену $y' = z$ и $y'' = z'z$, где је $z = z(y)$. Имамо: $z'z = z^3 + z \Rightarrow z' = z^2 + 1$, $z \neq 0$ (за $z = y' = 0$ имамо сингуларно решење $y = C$) $\Rightarrow \frac{dz}{dy} = z^2 + 1 \Rightarrow \int \frac{dz}{z^2+1} = \int dy \Rightarrow \operatorname{arctg} z = y + C_1 \Rightarrow z = \operatorname{tg}(y + C_1)$. Враћањем смене $z = y'$ имамо $y' = \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}(y + C_1) \Rightarrow \int \frac{dy}{\operatorname{tg}(y+C_1)} = \int dx \Rightarrow (\sin(y + C_1) = t) \Rightarrow \int \frac{dt}{t} = x \Rightarrow \ln|t| = x + C_2$ $\Rightarrow t = e^{x + C_2} \Rightarrow \underline{\sin(y + C_1) = C_3 \cdot e^x}$, где је $C_3 = e^{C_2}$.

НАПОМЕНА: Пошто у j-ни недостаје и y, задатак се може решити и сменом $z = y'$, $z = z(x)$.

ЗАДАТАК 4. Одредити партикуларно решење j-не $y'' = e^{2y}$, које задовољава услов $y(0) = 0$ и $y'(0) = 1$.

НАПОМЕНА: Обзиром да опште решење диф. једначине n-тог реда садржи n независних константи, Кошијев проблем за j-ну n-тог реда садржи n услова: $y(x_0) = y_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$.

Решење: Као и код диф. ј-на првог реда, партикуларно решење налазимо из општег.

Пошто у датој ј-ни недостаје променљива x, уводимо смену $y'=z$, $y''=z'\cdot z$, где је $z=z(y)$. Имаћемо $z'\cdot z=e^{2y} \Rightarrow \int z\,dz=\int e^{2y}dy \Rightarrow \frac{z^2}{2}=\frac{e^{2y}}{2}+C_1 \Rightarrow z^2=e^{2y}+2C_1 \Rightarrow y'^2=e^{2y}+2C_1$. Последњу једначину ћемо једноставније решити ако одмах израчунамо C_1. Заменом датог услова ($x=0, y=0, y'=1$) имаћемо $1=e^0+2C_1 \Rightarrow C_1=0$, па је последња ј-на $y'^2=e^{2y} \Rightarrow y'=\pm e^y$. Како је у датој тачки $y'=1>0$, мора бити $y'=e^y$. Сада имамо $\int e^{-y}dy=\int dx \Rightarrow -e^{-y}+C_2=x \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x+e^{-y}=C_2$. Опет, заменом почетног услова, добијамо $0+e^0=C_2 \Leftrightarrow C_2=1$, па је тражено партикуларно решење $x+e^{-y}=1$ или $\underline{x=1-e^{-y}}$.

ЗАДАТАК ЗА САМОСТАЛНИ РАД: Решити диф. једначину $y''\cdot tg\,y=2y'^2$.

Резултат: Сменом $z=y'$, $z=z(y)$ добија се решење $\underline{ctg\,y=C_2-C_1x} \Leftrightarrow y=arcctg(C_2-C_1x)$

$\Leftrightarrow x=\frac{C_2-ctg\,y}{C_1}$.

ЛИНЕАРНЕ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ

ЛИНЕАРНЕ ХОМОГЕНЕ Д.Ј. С КОНСТАНТНИМ КОЕФИЦИЈЕНТИМА

Једначина $a_0(x)\cdot y^{(n)}+a_1(x)\cdot y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}(x)\cdot y'+a_n(x)\cdot y=f(x)$ је линеарна диф. једначина n-тог реда. Ако је $f(x)\equiv 0$, кажемо да је једначина хомогена. Ако су све ф-је $a_i(x)$ константне, кажемо да је то линеарна диф. ј-на с константним коефицијентима.
Сада посматрајмо линеарну, хомогену диф. ј-ну другог реда: $a(x)\cdot y''+b(x)\cdot y'+c(x)\cdot y=0$.
Ако знамо да је $y_1=y_1(x)$ једно решење те једначине, моћићемо да јој спустимо ред сменом $z=\frac{y}{y_1} \Leftrightarrow y=z\cdot y_1$, где су све ф-је променљиве x.

ЗАДАТАК 5. Решити диф. ј-ну $(2x-x^2)y''+(x^2-2)y'+2(1-x)y=0$, ако је познато да је $y_1=e^x$ партикуларно решење дате једначине.

НАПОМЕНА: Заменити $y_1=e^x$, $y_1'=e^x$, $y_1''=e^x$ у једначину и проверити да ли је y_1 решење.

Решење: Уведимо смену $z=\frac{y}{y_1}=\frac{y}{e^x} \Leftrightarrow y=z\cdot e^x$ $(y=y(x), z=z(x))$. Заменом у ј-ну $y=ze^x$, $y'=(z'+z)e^x$ и $y''=(z''+2z'+z)e^x$ добићемо: $(2x-x^2)(z''+2z'+z)\cancel{e^x}+(x^2-2)(z'+z)\cancel{e^x}+(2-2x)\cdot z\cancel{e^x}=0 \Rightarrow \dots$
$\Rightarrow (2x-x^2)z''-(x^2-4x+2)z'+0\cdot z=0 \Rightarrow x(2-x)z''=(x^2-4x+2)z'$. С обзиром да у последњој ј-ни недостаје z, спустићемо јој ред сменом $u=z'$, $u=u(x)$ и $u'=z''$. Имаћемо:
$x(2-x)u'=(x^2-4x+2)u \Rightarrow \frac{du}{u}=\int\frac{x^2-4x+2}{x(2-x)}dx \Rightarrow \dots \Rightarrow \ln|u|=\int\left(-1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x-2}\right)dx \Rightarrow \ln|u|=-x+\ln|x(x-2)|+C$
$\Rightarrow u=e^c\cdot e^{-x}\cdot e^{\ln|x(x-2)|} \Rightarrow u=C_1e^{-x}\cdot x(x-2)$, $C_1=e^c$. Враћањем смене $u=z'$ добијамо $z'=C_1e^{-x}\cdot x(x-2) \Rightarrow$
$\Rightarrow \int dz=C_1\int e^{-x}(x^2-2x)dx \Rightarrow$ (2 пута парцијална интеграција) $\Rightarrow z=-C_1e^{-x}\cdot x^2+C_2$. Враћањем смене $z=\frac{y}{e^x} \Leftrightarrow y=z\cdot e^x$ добијамо $\underline{y=-C_1x^2+C_2e^x}$, тј. тражено опште решење.

НАПОМЕНА: Ако знамо два независна решења линеарне, хомогене диф. ј-не другог реда, на пример y_1 и y_2, тада знамо и њено опште решење: $y=C_1y_1+C_2y_2$ (слично важи и за линеарну, хомогену диф. ј-ну n-тог реда). Тако је у претходном задатку било довољно да нађемо $y_2=x^2$, одакле би имали опште решење $y=C_1y_1+C_2y_2=C_1e^x+C_2x^2$.

ЗАДАТАК 6. Решити диф. ј-ну $(x-1)y''+(4x-5)y'+(4x-6)y=0$, ако је познато да је једно решење облика $y_1=e^{ax}$.

Решење: Када уврстимо $y_1=e^{ax}$ $(y_1'=ae^{ax}, y_1''=a^2e^{ax})$ у дату једначину добићемо:

$(x-1)a^2e^{ax}+(4x-5)ae^{ax}+(4x-6)e^{ax}=0 \Rightarrow (a^2+4a+4)x-(a^2+5a+6)=0$, што је могуће ако и само је $a^2+4a+4=0$ и $a^2+5a+6=0$. Заједничко решење обе квадратне једначине је $a=-2$, па је $y_1=e^{-2x}$. Као и у прошлом задатку уводимо смену $z=\frac{y}{y_1}=\frac{y}{e^{-2x}}$, $z=z(x) \Rightarrow y=ze^{-2x}$ $\Rightarrow y'=(z'-2z)e^{-2x}$, $y''=(z''-4z'+4z)e^{-2x}$. Заменом у ј-ну добијамо: $(x-1)(z''-4z'+4z)e^{-2x}+$ $+(4x-5)(z'-2z)e^{-2x}+(4x-6)\cdot ze^{-2x}=0 \Rightarrow \ldots \Rightarrow (x-1)z''-z'=0$. Сада спуштамо ред сменом $u=z'$, $u=u(x)$ $\Rightarrow (x-1)u'=u \Rightarrow \int\frac{du}{u}=\int\frac{dx}{x-1} \Rightarrow \ldots \Rightarrow u=C_1(x-1)$. Враћамо смену $u=z'=C_1(x-1) \Rightarrow \int dz=\int C_1(x-1)dx$ $\Rightarrow z=C_1(x-1)^2+C_2 \Rightarrow \frac{y}{e^{-2x}}=C_1(x-1)^2+C_2 \Rightarrow \underline{y=C_1(x-1)^2e^{-2x}+C_2e^{-2x}}$.

ЗАДАТАК ЗА САМОСТАЛНИ РАД: Решити ј-ну $\sin^2x\cdot y''-\sin x\cdot\cos x\cdot y'+y=0$, ако је $y_1=\sin x$.

РЕЗУЛТАТ: $\underline{y(x)=C_1\cdot\sin x\cdot\ln\left|tg\frac{x}{2}\right|+C_2\cdot\sin x}$.

ЛИНЕАРНЕ ХОМОГЕНЕ ДИФ. ЈЕДНАЧИНЕ С КОНСТАНТНИМ КОЕФИЦИЈЕНТИМА

Једначина $a_0 \cdot y^{(n)} + a_1 \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} \cdot y' + a_n \cdot y = 0$ је линеарна хомогена диф. ј-на с константним коефицијентима. Њено опште решење је облика $y = C_1 y_1 + \ldots + C_n y_n$, где су $y_1, \ldots, y_n$ независна решења дате једначине. Још је преостало да нађемо n независних решења: $y_1, \ldots, y_n$.

Једначина $a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0$ је карактеристична једначина (полином) дате диф. једначине, која има n решења: $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Решења карактеристичне ј-не $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ генерисаће тражена, независна партикуларна решења $y_1, \ldots, y_n$, а самим тим и опште решење дате лин. хом. диф. јед. с константним коефицијентима.

1. случај: $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ су реална и различита $\Rightarrow y_1 = e^{\lambda_1 x}, \ldots, y_n = e^{\lambda_n x}$

2. случај: постоје једнака (вишеструка) реална решења, $\lambda_1 = \ldots = \lambda_k \Rightarrow y_1 = e^{\lambda_1 x}, y_2 = x \cdot e^{\lambda_1 x}, \ldots, y_k = x^{k-1} e^{\lambda_1 x}$

3. случај: постоје нереална (комплексна), различита решења $\lambda_{1,2} = a \pm ib \Rightarrow y_1 = e^{ax} \cos bx, y_2 = e^{ax} \sin bx$

4. случај: постоје вишеструка нереална (комплексна) решења $\lambda_1 = \ldots = \lambda_k = a+bi$ и

$\lambda_{k+1} = \ldots = \lambda_{2k} = a-bi \Rightarrow y_1 = e^{ax}\cos bx,\ y_2 = xe^{ax}\cos bx, \ldots, y_k = x^{k-1}e^{ax}\cos bx,\ y_{k+1} = e^{ax}\sin bx,$

$y_{k+2} = xe^{ax}\sin bx, \ldots, y_{2k} = x^{k-1}e^{ax}\sin bx.$

ЗАДАТАК 7. Решити једначину $y'' - 4y' + 3y = 0$.

Решење: Одговарајућа карактеристична ј-на је $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$, чија су решења $\lambda_1 = 3$ и $\lambda_2 = 1$. Како су решења реална и различита, одговарајућа партикуларна решења су $y_1 = e^{3x}$ и $y_2 = e^{1x}$, па је опште решење $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$; тј. $\underline{y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{x}}$.

ЗАДАТАК 8. Решити једначину $y''' - y' = 0$, а потом наћи партикуларно решење за које важи $y(0) = 0$, $y'(0) = -1$ и $y''(0) = 1$.

Решење: Решења карактеристичне ј-не $\lambda^3 - \lambda^1 = 0$ су $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ и $\lambda_3 = -1$, па је $y_1 = e^{0x} = 1$, $y_2 = e^{1x}$, $y_3 = e^{-1x}$

$\Rightarrow \underline{y = C_1 \cdot 1 + C_2 e^{x} + C_3 e^{-x}}$ је опште решење.

За би смо одредили партикуларно решење, почетне услове $(x=0, y=0, y'=-1, y''=1)$ замењујемо у $y=C_1+C_2e^x+C_3e^{-x}$, $y'=C_2e^x-C_3e^{-x}$ и $y''=C_2e^x+C_3e^{-x}$. Добићемо следећи систем (по C_1, C_2, C_3):

$$\left.\begin{aligned} 0 &= C_1+C_2+C_3 \\ -1 &= C_2-C_3 \\ 1 &= C_2+C_3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \dots \Rightarrow \left.\begin{aligned} C_1&=-1 \\ C_2&=0 \\ C_3&=1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{враћањем у опште р.} \Rightarrow \underline{y=-1+e^{-x}} \text{ је тражено пар. решење}$$

ЗАДАТАК 9. Решити једначину $y'''-y''-y'+y=0$.

Решење: Корени карактеристичне једначине $\lambda^3-\lambda^2-\lambda+1=0$ су $\lambda_{1,2}=1$ и $\lambda_3=-1$. Одговарајућа партикуларна решења су $y_1=e^{1\cdot x}$, $y_2=x\cdot e^{1\cdot x}$ и $y_3=e^{-1x}$, па је опште решење:

$y=C_1e^x+C_2xe^x+C_3e^{-x}$.

ЗАДАТАК 10. Решити ј-ну $y^{(4)}+2y'''-2y'-y=0$.

Решење: Корени карактеристичне ј-не $\lambda^4+2\lambda^3-2\lambda-1=0 \Leftrightarrow (\lambda^4-1)+2\lambda(\lambda^2-1)=0 \Leftrightarrow (\lambda^2-1)(\lambda^2+1+2\lambda)=0$
$\Leftrightarrow (\lambda-1)(\lambda+1)^3=0 \Rightarrow \lambda_1=1,\ \lambda_{2,3,4}=-1$. Одговарајућа партикуларна решења су $y_1=e^{1\cdot x}$, $y_2=e^{-1\cdot x}$; $y_3=x\cdot e^{-1\cdot x}$; $y_4=x^2\cdot e^{-1\cdot x}$, па је $\underline{y=C_1e^{x}+C_2e^{-x}+C_3xe^{-x}+C_4x^2e^{-x}}$ опште решење.

ЗАДАТАК 10. Решити диф. једначину $y''-4y'+13y=0$.

Решење: Корени карактеристичне ј-не $\lambda^2-4\lambda+13=0$ су коњуговано комплексни $\lambda_{1,2}=2\pm i\cdot 3$. Одговарајућа партикуларна решења су $y_1=e^{2x}\cos 3x$ и $y_2=e^{2x}\sin 3x$, па је опште реш: $\underline{y=C_1e^{2x}\cos 3x+C_2e^{2x}\sin 3x}$.

ЗАДАТАК 11. Одредити партикуларно решење диф. ј-не $y'''+y'=0$, које задовољава услове $y(\frac{\pi}{2})=2$, $y'(\frac{\pi}{2})=y''(\frac{\pi}{2})=-1$.

Решење: Корени карактеристичне ј-не $\lambda^3+\lambda=0$ су $\lambda_1=0$ и $\lambda_{2,3}=\pm i$, па је $y_1=e^{0x}=1$, $y_2=e^{0x}\cdot\cos 1x$ и $y_3=e^{0x}\cdot\sin 1x$, одакле добијамо опште решење $y=C_1\cdot 1+C_2\cdot\cos x+C_3\cdot\sin x$.

Да би одредили партикуларно решење, дати услов $(x=\frac{\pi}{2}, y=2, y'=y''=-1)$ замењујемо у једначине: $y=C_1+C_2\cdot\cos x+C_3\cdot\sin x \Rightarrow y'=-C_2\sin x+C_3\cos x \Rightarrow y''=-C_2\cos x-C_3\sin x$. Добијамо систем:

$$\left.\begin{array}{l} 2=C_1 \quad +C_3 \\ -1= \quad -C_2 \\ -1= \quad\quad -C_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} C_1=1 \\ C_2=1 \\ C_3=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{враћањем у опште реш.} \Rightarrow \underline{y=1+\cos x+\sin x} \text{ је тражено пар. реш.}$$

ЗАДАТАК 12. Решити диф. једначину $y^{(4)}+2y''+y=0$.

Решење: Корени карактеристичне j-не $\lambda^4+2\lambda^2+1=0 \Leftrightarrow (\lambda^2+1)^2=0$ су $\lambda_{1,2}=i$ и $\lambda_{3,4}=-i$. То значи да је $\lambda_1=e^{0x}\cos 1\cdot x=\cos x$, $\lambda_2=e^{0x}\cdot\sin 1x=\sin x$ и $\lambda_3=x\cos x$, $\lambda_4=x\sin x$, па је опште решење дате диф. једначине $\underline{y=C_1\cdot\cos x+C_2\cdot\sin x+C_3\cdot x\cos x+C_4\cdot x\sin x}$.

ЗАДАТАК ЗА САМОСТАЛНИ РАД: Решити диф. једначину $y^{(4)}+2y'''+4y''-2y'-5y=0$.

Резултат: Опште решење је $\underline{y=C_1e^{x}+C_2e^{-x}+C_3e^{-x}\cos 2x+C_4e^{-x}\sin 2x}$.

Математика 3 - вежбе

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
ФАКУЛТЕТ ОРГАНИЗАЦИОНИХ НАУКА

Небојша Николић