Математика 3 - вежбе

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
ФАКУЛТЕТ ОРГАНИЗАЦИОНИХ НАУКА

Небојша Николић

ИЗВОД ФУНКЦИЈЕ КОМПЛЕКСНЕ ПРОМЕНЉИВЕ
КОШИ-РИМАНОВИ УСЛОВИ

Извод ф-је комплексне променљиве дефинише се слично изводу ф-је реалне променљиве:
$f'(z_0)=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$ и тада кажемо да је ф-ја $f(z)$ диференцијабилна у тачки z_0.

За $f(z)$ кажемо да је аналитичка (регуларна) у z_0 ако је диференцијабилна у свакој тачки неке околине тачке z_0. Тачке у којима ф-ја није аналитичка називају се сингуларним тачкама. Тачка z_0 је изоловани сингуларитет ако је $f(z)$ аналитичка у свим тачкама неке околине тачке z_0, сем у z_0. Изоловани сингуларитет је пол ф-је $f(z)$ ако је $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty$. Ако је $\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)^n f(z)=w_0\neq 0$, кажемо да је z_0 пол реда n.

Ако је ф-ја $f(z)$ диференцијабилна у тачки $z_0=x_0+iy_0$ и $f(z)=u(x,y)+i\cdot v(x,y)$, тада постоје сви парцијални изводи ф-ја $u(x,y)$ и $v(x,y)$ у тачки (x_0,y_0) и важе Коши-Риманови услови:

$$\left.\begin{aligned} u'_x(x_0,y_0)&=v'_y(x_0,y_0)\\ u'_y(x_0,y_0)&=-v'_x(x_0,y_0)\end{aligned}\right\}\ (\text{К-Р})$$

Супротно, ако су $u(x,y)$ и $v(x,y)$ диференцијабилне у (x_0,y_0) и важе К-Р услови у (x_0,y_0), тада је $f(z)$ диференцијабилна у $z_0=x_0+iy_0$.

Извод функције комплексне променљиве
Коши-Риманови услови

Напоменимо да за елементарне комплексне ф-је важи таблица извода: $(\sin z)'=\cos z$, $(\cos z)'=-\sin z$, $(\ln z)'=\frac{1}{z}$, $(z^a)'=az^{a-1}$, $(a^z)'=a^z\cdot\ln a$, $(e^z)'=e^z$ итд.

ЗАДАТАК 1. Испитати диференцијабилност ф-је $f(z)$ у тачки 0.

1° $f(z)=\operatorname{Re} z\cdot|z|$, $\quad 2^\circ$ $f(z)=\bar{z}$

РЕШЕЊЕ: 1°

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(0+\Delta z)-f(0)}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\operatorname{Re}(\Delta z)\cdot|\Delta z|}{\Delta z}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x\cdot\sqrt{x^2+y^2}}{x+iy}\cdot\frac{x-iy}{x-iy}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sqrt{x^2+y^2}\cdot(x^2-ixy)}{x^2+y^2}=\ldots=$$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}-i\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\overbrace{\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}^{\le 1}\cdot\overbrace{x}^{\to 0}-i\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\overbrace{\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}^{\le 1}\cdot\overbrace{y}^{\to 0}=0-i\cdot 0=0,\ \text{тј. } f'(0)=0.$$

2° I начин: $\displaystyle\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(\Delta z)-f(0)}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}\cdot\frac{\overline{\Delta z}}{\overline{\Delta z}}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\overline{\Delta z}^{\,2}}{|\Delta z|^2}$ не постоји (видети 10. 2° задатак)

II начин: $f(x+iy)=x-iy$, $z=x+iy$, тј. $u(x,y)=x$ реални део ф-је f и $v(x,y)=-y$ имагинарни део.

Како је $u'_x(x,y)=1\neq v'_y(x,y)=-1$, не важе Коши-Риманови услови па ф-ја $f(z)$ није диференцијабилна у свакој тачки, па и у $z=0$.

2. Испитати регуларност функције $f : C \to C$ ако је

$$f(z) = \frac{1}{\sin z} - \frac{1}{z} \text{ за } z \neq 0 \text{ и } f(0) = 0.$$

Решење: За $z \neq 0$ функција је регуларна. Како је

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{z - \sin z}{z \sin z} = \lim_{z\to 0} \frac{1 - \cos z}{\sin z + z\cos z} = \lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{2\cos z - z \sin z} = 0,$$

функција је у $z = 0$ непрекидна. Слично је

$$\lim_{z\to 0} \frac{f(\Delta z) - f(0)}{\Delta z} = \lim_{z\to 0} \frac{\Delta z - \sin \Delta z}{\Delta^2 z \sin \Delta z} = \cdots = \frac{1}{6},$$

па f у $z = 0$ има извод. Према томе, f је регуларна у целој комплексној равни.

3. Испитати диференцијабилност и аналитичност функције

$$f \,:\, z \mapsto (z-1)Re(z+1).$$

Решење: Ако је $f(z) = u(x, y)+iv(x, y)$, онда је $u(x, y) = x^2-1$ и $v(x, y) = y(x+1)$, па је

$$u'_x(x, y) = 2x, \quad u'_y(x, y) = 0, \quad v'_x(x, y) = y, \quad v'_y(x, y) = x + 1.$$

Како су Коши Риманови услови испуњени једино у тачки $z = 1$ и како функције u и v имају непрекидне парцијалне изводе у R^2, то је f диференцијабилна у тачки $z = 1$. Међутим, не постоји ниједна околина те тачке у којој је функција диференцијабилна, па f није аналитичка ни у једној тачки комплексне равни.

4. Нека је $z = x + iy$ и нека је функција $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ аналитичка за $x \neq 0$. Одредити $v(x,y)$ ако је

$$u(x,y) = ln\,|z|^2.$$

Решење: Из Коши Риманових услова добијамо да је

$$v'_y(x,y) = u'_x(x,y) = \frac{2x}{x^2+y^2}, \quad v'_x(x,y) = -u'_y(x,y) = -\frac{2y}{x^2+y^2},$$

па је

$$v(x,y) = \int \frac{2x}{x^2+y^2}dy = 2\,arctan\,\frac{y}{x} + \varphi(x).$$

Диференцирањем леве и десне стране ове једнакости налазимо да је $\varphi(x) = C$. Према томе, $v(x,y) = 2\,arctan\,\frac{y}{x} + C$, где је $C \in R$.

5. Одредити све аналитичке функције $f : x+iy \mapsto u+iv$ за које је

$$v(x,y) = \frac{x+y}{x^2+y^2}.$$

Решење: Из једнакости

$$u'_x = v'_y = \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} - \frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

следи да је

$$u(x,y) = \int \frac{dx}{x^2+y^2} - y\int \frac{2x\,dx}{(x^2+y^2)^2} - 2y^2 \int \frac{dx}{(x^2+y^2)^2} + \varphi(y).$$

Међутим,

$$I = \int \frac{dx}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} + 2\int \frac{x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x}{x^2+y^2} + 2I - 2y^2 \int \frac{dx}{(x^2+y^2)^2},$$

па је $u(x,y) = \dfrac{y-x}{x^2+y^2} + \varphi(y)$. Из друге Коши - Риманове једнакости, $u'_y = -v'_x$, налазимо да је $\varphi'(y) = 0$, односно $\varphi(y) = C$ ($C \in R$). Према томе, $f(z) = (i-1)/z + C$.

6. Одредити све аналитичке функције $f : x+iy \mapsto u+iv$ за које је

$$u(x,y) = \frac{\sin 2x}{\cos 2x + \operatorname{ch} 2y}.$$

Решење: Из једнакости

$$v'_x = -u'_y = \frac{2\sin 2x \cdot \operatorname{sh} 2y}{(\cos 2x + \operatorname{ch} 2y)^2}$$

следи

$$v(x,y) = -\operatorname{sh} 2y \int \frac{d(\cos 2x)}{(\cos 2x + \operatorname{ch} 2y)^2} + \varphi(y) = \frac{\operatorname{sh} 2y}{\cos 2x + \operatorname{ch} 2y} + \varphi(y).$$

Како је

$$u'_x = \frac{2 + 2\cos 2x \cdot \operatorname{ch} 2y}{(\cos 2x + \operatorname{ch} 2y)^2},$$

из услова $u'_x = v'_y$ добијамо да је $\varphi'(y) = 0$, односно $\varphi(y) = A$, $(A \in R)$. Према томе,

$$f(x+iy) = \frac{\sin 2x + i \cdot \operatorname{sh} 2y}{\cos 2x + \operatorname{ch} 2y} + Ai, \quad A \in R,$$

односно $f(z) = \tan z + Ai$.

Интеграл функције комплексне променљиве

Интеграл ф-је комплексне променљиве, по кривој C, дефинише се слично као одређени интеграл реалне ф-је (помоћу интегралне суме) и означава $\int_C f(z)dz$.

Ако је крива C дата једначином $z(t)=x(t)+i\cdot y(t)$, $a\leq t\leq b$, онда је $\int_C f(z)dz=\int_a^b f(\overset{z(t)}{z})\cdot z'(t)dt$.

Ако комплексну ф-ју $f(\overset{z(t)}{z})\cdot z'(t)$ запишемо у облику $u(t)+i\cdot v(t)$ имаћемо:

$$\int_C f(z)dz=\int_a^b f(z(t))\cdot z'(t)dt=\int_a^b (u(t)+i\cdot v(t))dt=\int_a^b u(t)dt+i\int_a^b v(t)dt,$$

што значи да се дати интеграл може израчунати помоћу два реална, одређена интеграла.

Такође, важе правила интеграције: $\int_C (\alpha f(z)+\beta g(z))dz=\alpha\int_C f(z)dz+\beta\int_C g(z)dz$ и

$$\int_{C_1+C_2} f(z)dz=\int_{C_1} f(z)dz+\int_{C_2} f(z)dz$$

7. Израчунати $\int_{C+} Im(z)dz$, где је $C = \{z \mid z = 3e^{it},\ t \in [0, \pi/2]\}$.

Решење: Ако је $z = x + iy$, онда је

$$x = 3\cos t, \quad y = 3\sin t, \quad dz = (3\cos t + i3\sin t)dt,$$

па је

$$\int_C Imz\,dz = -9\int_0^{\pi/2} \sin^2 t\,dt + 9i\int_0^{\pi/2} \sin t\cos t\,dt = -\frac{9}{2}\left(\frac{\pi}{2} - i\right).$$

8. Израчунати $\int_{C+} (Re(z) + Im(z))dz$, где је $C = \{z \mid |z| = 1\}$.

Решење: Ако је I дати интеграл и $z = x + iy$, тада је

$$I = \int_{|z|=1} (x+y)(dx + idy) = \int_{|z|=1} (x+y)dx + i\int_{|z|=1} (x+y)dy.$$

Параметризацијом $x = cos\,t$ и $y = sin\,t$ имамо

$$I = -\int_0^{2\pi} (cos\,y\,sin\,t + sin^2 t)dt + i \cdot \int_0^{2\pi} (cos^2 t + sin\,t\,cos\,t)dt.$$

Како је

$$\int_0^{2\pi} sin\,t\,cos\,tdt = 0, \quad \int_0^{2\pi} sin^2 tdt = \int_0^{2\pi} cos^2 tdt = \pi,$$

то је $I = (i-1)\pi$.

9. Израчунати $\int_{C^-} \frac{\overline{z}}{z} dz$ ако је C граница области D, где је

$$D = \{z \, : \, 1 < |z| < 2, \; Re(z) > 0\}.$$

Решење: Нека је f подинтегрална функција и нека су C_1, C_2, C_3 и C_4 делови контуре C. На C_1 је $x = 0$ и $dz = iy$ за $y \in [-2, -1]$, па је

$$I_1 = \int_{C_1} f(z)dz = \int_{-2}^{-1} \frac{-iy}{iy} idy = -i \int_{-2}^{-1} = -i.$$

Слично је

$$I_3 = \int_{C_3} f(z)dz = \int_{1}^{2} \frac{-iy}{iy} idy = -i \int_{1}^{2} = -i.$$

На C_2 је $z = e^{it}$, $\overline{z} = e^{-it}$, $dz = ie^{it}dt$ за $t \in [-\pi/2, \pi/2]$, па је

$$I_2 = \int_{C_2} f(z)dz = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{e^{-it}}{e^{it}} ie^{it}dt = i \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-it}dt = 2i.$$

На C_4 је $z = 2e^{it}$, $\overline{z} = 2e^{-it}$, $dz = 2ie^{it}dt$, при чему се параметар t мења од $\pi/2$ до $-\pi/2$, па је

$$I_4 = \int_{C_4} f(z)dz = \int_{\pi/2}^{-\pi/2} \frac{2e^{-it}}{2e^{it}} 2ie^{it}dt = 2i \int_{\pi/2}^{-\pi/2} e^{-it}dt = -4i.$$

Према томе,

$$\int_{C^-} \frac{\overline{z}}{z} dz = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = -4i.$$

10. Израчунати $\int_{C+} Re(z)dz$ ако је C граница области D, где је

$$D = \{x + iy \,:\, x^2 + y^2 < 2x,\; x^2 + y^2 < 2y\}.$$

Решење: Нека је

$$C_1 = \{x + iy \,:\, x = \cos t,\; y = 1 + \sin t,\; -\pi/2 \le t \le 0\},$$

$$C_2 = \{x + iy \,:\, x = 1 + \cos t,\; y = \sin t,\; \pi/2 \le t \le \pi\}.$$

За $z = x + iy \in C_1$ је $dz = -\sin t + i\cos t$ и $Re(z) = \cos t$, па је

$$I_1 = \int_{C_1} Re(z)dz = \int_{-\pi/2}^{0} \cos t(-\sin t + i\cos t)dt = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}i.$$

Слично, за $z \in C_2$ је $dz = -\sin t + i\cos t$ и $Re(z) = 1 + \cos t$, па је

$$I_2 = \int_{C_2} Re(z)dz = \int_{\pi/2}^{\pi} (1 + \cos t)(-\sin t + i\cos t)dt = -\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}i - i.$$

Према томе,

$$\int_{C+} Re(z)dz = I_1 + I_2 = \left(\frac{1}{2}\pi - 1\right)i.$$

Задатак за самостални рад:

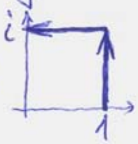
Одредити аналитичку функцију $f : x + iy \mapsto u + iv$ ако је

$$u(x,y) = e^{x}\left(x\cos y - y\sin y\right),\ f(0) = 0.$$

Резултат:

$$v(x,y) = xe^{x}\sin y + ye^{x}\cos y.$$

ЗАДАТАК ЗА САМОСТАЛНИ РАД: Израчунати $\int_L z\cdot\bar{z}\cdot dz$ ако је:

1° L:  , 2° L:  , 3° L: 

РЕЗУЛТАТ: $1^\circ\ I=-\frac{1}{2}$, $2^\circ\ I=-\frac{3}{2}$, $3^\circ\ I=-1$.

Математика 3 - вежбе

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
ФАКУЛТЕТ ОРГАНИЗАЦИОНИХ НАУКА

Небојша Николић