Математика 3 - вежбе

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
ФАКУЛТЕТ ОРГАНИЗАЦИОНИХ НАУКА

Небојша Николић

ЛИНЕАРНЕ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ ПРВОГ РЕДА

Једначина облика $y' + p(x)\cdot y = q(x)$ је линеарна диф. једначина првог реда.
Може се решити методом неодређених ф-ја: $y = u\cdot v$ $(u=u(x), v=v(x)) \Rightarrow y' = u'v + uv' \Rightarrow$ (заменом у једначину) $\Rightarrow u'v + u\cdot v' + p(x)\cdot u\cdot v = q(x) \Leftrightarrow u'v + u(v' + p(x)\cdot v) = q(x)$. Сада ф-ју v бирамо као решење једначине $v' + p(x)\cdot v = 0$, а потом u као решење јед. $u'v = q(x)$ (обе су једначине са раздвојеним променљивима).
Методом неодређених ф-ја може се добити и формула за решавање линеарне диф. једначине: $y = e^{-\int p(x)dx}\cdot\left[C + \int q(x)\cdot e^{\int p(x)dx}\cdot dx\right]$, што је најједноставнији начин за решавање.
Методу варијације константи ћемо показати касније, када будемо решавали линеарне диф. једначине са константним коефицијентима.

Линеарна диференцијална једначина првог реда

ФОН

Задатак 9. Решити диф. једначину $y' + \frac{y}{x} = 3x$.

Решење: I начин (метода неодређених ф-ја): $y = u\cdot v$ замењујемо у дату једначину $\Rightarrow$

$u'v + uv' + \frac{1}{x}\cdot u\cdot v = 3x \Leftrightarrow u'v + u\left(v' + \frac{1}{x}v\right) = 3x$. Најпре решавамо једначину

$v' + \frac{1}{x}v = 0 \Leftrightarrow \frac{dv}{dx} = -\frac{v}{x} \Leftrightarrow \int\frac{dv}{v} = \int -\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|v| = -\ln|x| \Leftrightarrow \ln|v| = \ln|x|^{-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow v = x^{-1} = \frac{1}{x}$. Нисмо додавали константу приликом интеграљења, јер нам је довољно да нађемо само једну ф-ју v за коју важи $v' + \frac{1}{x}v = 0$ (из истог разлога смо узели $|v| = v$ и $|x|^{-1} = x^{-1}$).

Сада решавамо једначину $u'v + 0 = 3x \Leftrightarrow u'\cdot\frac{1}{x} = 3x \Leftrightarrow \frac{du}{dx}\cdot\frac{1}{x} = 3x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \int du = \int 3x^2\,dx \Rightarrow u = \cancel{3}\cdot\frac{x^3}{\cancel{3}} + C$. На крају: $y = u\cdot v = (x^3 + C)\cdot\frac{1}{x} \Leftrightarrow \underline{y = x^2 + \frac{C}{x}}$.

II начин (формулом): Дата једначина је линеарна $y' + p(x)\cdot y = q(x)$, где је $p(x) = \frac{1}{x}$ и $q(x) = 3x$. Заменом у ф-лу $y = e^{-\int p(x)dx}\cdot\left[C + \int q(x)\cdot e^{\int p(x)dx}dx\right]$ добијамо:

$y = e^{-\int\frac{1}{x}dx}\left[C + \int 3x\cdot e^{\int\frac{1}{x}dx}dx\right] = e^{-\ln|x|}\cdot\left[C + \int 3x\cdot e^{\ln|x|}dx\right] = e^{\ln|x|^{-1}}\cdot\left[C + 3\int x\cdot x\,\boxed{dx}\right] = x^{-1}\cdot\left[C + \cancel{3}\frac{x^3}{\cancel{3}}\right]$, тј.

$y = \frac{1}{x}(C + x^3) \Leftrightarrow y = \frac{C}{x} + x^2$.

НАПОМЕНА: У претходном задатку смо узели да је $|x|=x$. У случају $|x|=-x$ добили би $y=(-x)^{-1}\left[C-3\frac{x^3}{3}\right]=\frac{1}{-x}(C-x^3) \Leftrightarrow y=-\frac{C}{x}+x^2 \Leftrightarrow y=\frac{C_1}{x}+x^2$, $C_1=-C$, тј. исто опште решење. Из истог разлога ћемо и у наредним задацима моћи да узмемо да је $|t|=t$.

ЗАДАТАК 10. Решити диф. једначину $y'=\frac{y}{\ln y+x-1}$.

Дата једначина није линеарна по ф-ји $y=y(x)$, али ако је посматрано као јед. по ф-ји $x=x(y)$ имаћемо: $\frac{1}{x'}=\frac{y}{\ln y+x-1} \Rightarrow x'=\frac{\ln y+x-1}{y} \Rightarrow$

$\Rightarrow x'-\frac{1}{y}x=\frac{\ln y-1}{y}$ линеарну јед. $x'+p(y)\cdot x=q(y)$, где је $p(y)=-\frac{1}{y}$ и $q(y)=\frac{\ln y-1}{y}$. Заменом у ф-лу $x=e^{-\int p(y)dy}\cdot\left[C+\int q(y)\cdot e^{\int p(y)dy}\cdot dy\right]$ добићемо:

$x=e^{\int\frac{1}{y}dy}\cdot\left[C+\int\frac{\ln y-1}{y}\cdot e^{-\int\frac{1}{y}dy}\cdot dy\right]=\ldots=y\cdot\left[C+\int\frac{\ln y-1}{y^2}dy\right]=\left(u=(\ln y-1),\ dv=\frac{dy}{y^2}\ldots\right)$

$\Rightarrow x=\ldots=y\left[C+\frac{\ln y-1}{-y}+\int\frac{1}{y^2}dy\right]=y\left[C-\frac{\ln y}{y}+\cancel{\frac{1}{y}}-\cancel{\frac{1}{y}}\right] \Rightarrow \underline{x=C\cdot y-\ln y}$.

Задатак 11. Одредити партикуларно решење диф. једначине $y' \sin x - y \cos x = -\frac{\sin^2 x}{x^2}$, за које важи гранични услов $\lim_{x\to\infty} y(x) = 0$.

Решење: Дељењем полазне једначине са $\sin x \neq 0$ добијамо линеарну диф. једначину $y' - \frac{\cos x}{\sin x} \cdot y = -\frac{\sin x}{x^2}$. $p(x) = -\frac{\cos x}{\sin x}$ и $q(x) = -\frac{\sin x}{x^2}$ замењујемо у формулу $y = e^{-\int p(x)dx} \cdot [C + \int q(x) e^{\int p(x)dx} \cdot dx]$ (пре замене можемо да израчунамо $\int p(x)dx = \int -\frac{\cos x}{\sin x} dx = (\text{смена } \sin x = t) = -\int \frac{dt}{t} = -\ln|t| = -\ln|\sin x|$, па је $e^{-\int p(x)dx} = e^{\ln|\sin x|} = \sin x$ и $e^{\int p(x)dx} = e^{-\ln|\sin x|} = e^{\ln|\sin^{-1} x|} = \frac{1}{\sin x}$) $\Rightarrow y = \sin x \cdot [C + \int -\frac{\cancel{\sin x}}{x^2} \cdot \frac{1}{\cancel{\sin x}} \cdot dx] \Rightarrow$

$\Rightarrow y = \sin x \cdot [C - \int x^{-2} dx] = \sin x \cdot [C - \frac{x^{-1}}{-1}] = \sin x \cdot (C + \frac{1}{x})$, тј. $\underline{y = C \cdot \sin x + \frac{\sin x}{x}}$ је опште решење.

Заменом општег решења у гранични услов добијамо $\lim_{x\to\infty} (C \cdot \sin x + \frac{\sin x}{x}) = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \lim_{x\to\infty} C \sin x + \lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0 \Leftrightarrow C \cdot \lim_{x\to\infty} \sin x + 0 = 0$ (јер је $|\sin x| \leq 1$, $x \to \infty \Rightarrow \frac{\sin x}{x} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$).

Једнакост $C \cdot \lim_{x\to\infty} \sin x = 0$ је могућа само за $C = 0$ ($\lim_{x\to\infty} \sin x \neq 0$). Враћањем у опште решење добијамо $\underline{y = \frac{\sin x}{x}}$, тј. тражено партикуларно решење.

ЗАДАТАК ЗА САМОСТАЛНИ РАД: Решити једначину $(x^2+x+1)\cdot(y'-\cos x)=(2x+1)\cdot(y-\sin x)$.

Резултат: Решење линеарне једначине $y'-\frac{2x+1}{x^2+x+1}y=\cos x-\frac{2x+1}{x^2+x+1}\sin x$ је

$$\underline{y=C\cdot(x^2+x+1)+\sin x}.$$

НАПОМЕНА: $\int\frac{(2x+1)\sin x}{(x^2+x+1)^2}dx=\left(u=\sin x,\ dv=\frac{(2x+1)dx}{(x^2+x+1)^2}\right)=-\frac{\sin x}{x^2+x+1}+\int\frac{\cos x\cdot dx}{x^2+x+1}$, па је

$$\int\frac{\cos x\cdot dx}{x^2+x+1}-\int\frac{(2x+1)\sin x}{(x^2+x+1)^2}dx=\frac{\sin x}{x^2+x+1}.$$

ЗАДАТАК ЗА САМОСТАЛНИ РАД: Одредити партикуларно решење диф. једначине

$x(x-1)y'+y=x^2(2x-1)$, које задовољава услов $y(2)=4$.

Резултат: $y=x^2+\frac{C\cdot x}{x-1}$ је опште решење, $C=0 \Rightarrow \underline{y=x^2}$ је тражено партикуларно реш.

Бернулијева диференцијална једначина

БЕРНУЛИЈЕВЕ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ

Једначина облика $y'+p(x)y=q(x)\cdot y^{\alpha}$, $\alpha\notin\{0,1\}$ је Бернулијева диф. једначина. Може се решити методом неодређених функција ($y=u\cdot v, u=u(x), v=v(x)$) или сменом $z=y^{1-\alpha}$, $z=z(x)$ када се своди на линеарну диф. једначину.

ЗАДАТАК 12. Решити диф. једначину $xy'+y=y^2\cdot\ln x$.

Решење: I начин) Задатак ћемо решити методом неодређених ф-ја. $y=u\cdot v$ замењујемо у Бернулијеву једначину (после дељења са x) $y'+\frac{1}{x}y=\frac{\ln x}{x}\cdot y^2$:

$u'v+uv'+\frac{1}{x}uv=\frac{\ln x}{x}\cdot u^2v^2 \Leftrightarrow u'v+u\left(v'+\frac{v}{x}\right)=\frac{\ln x}{x}u^2v^2$. Бирамо $v=v(x)$ као решење једначине $v'+\frac{v}{x}=0 \Leftrightarrow \frac{dv}{dx}=-\frac{v}{x} \Leftrightarrow \int\frac{dv}{v}=-\int\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|v|=-\ln|x| \Rightarrow v=x^{-1}=\frac{1}{x}$.

Враћањем у једначину добијамо: $u'\cdot\frac{1}{x}=\frac{\ln x}{x}u^2\cdot\frac{1}{x^2} \Rightarrow \frac{du}{dx}=\frac{\ln x}{x^2}\cdot u^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \int\frac{du}{u^2}=\int\frac{\ln x}{x^2}dx \Rightarrow \left(U=\ln x, dV=\frac{dx}{x^2}\right) \Rightarrow -\frac{1}{u}+C=-\frac{\ln x}{x}+\int\frac{dx}{x^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow -\frac{1}{u} = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} - C \Leftrightarrow -\frac{1}{u} = -\frac{\ln x + 1 + Cx}{x} \Rightarrow u = \frac{x}{\ln x + 1 + Cx}$. На крају, добијене ф-је $u=u(x)$ и $v=v(x)$ враћамо у решење $y = u\cdot v = \frac{x}{\ln x+1+Cx}\cdot\frac{1}{x} \Rightarrow \underline{y = \frac{1}{\ln x+1+Cx}}$.

II начин) Бернулијеву диф. једначину $y'+\frac{1}{x}y=\frac{\ln x}{x}\cdot y^{\alpha}$, $\alpha=2$ решићемо сменом $z=y^{1-\alpha} \Leftrightarrow$

$z=y^{-1}$, $z=z(x)$. Заменом $y=z^{-1}$ и $y'=-z^{-2}\cdot z'$ у једначину добијамо:

$-z^{-2}\cdot z'+\frac{1}{x}z^{-1}=\frac{\ln x}{x}\cdot z^{-2} \Rightarrow z'-\frac{1}{x}\cdot z=-\frac{\ln x}{x}$ линеарну једначину $\left(p(x)=-\frac{1}{x}, q(x)=-\frac{\ln x}{x}\right)$.

Сада је $z=e^{-\int p(x)dx}\cdot\left[C+\int -\frac{\ln x}{x}\cdot e^{\int p(x)dx}\cdot dx\right] \Rightarrow z=e^{\int\frac{1}{x}dx}\cdot\left[C-\int\frac{\ln x}{x}e^{-\int\frac{1}{x}dx}\cdot dx\right]\Rightarrow\dots\Rightarrow$

$\Rightarrow z=x\cdot\left[C-\int\frac{\ln x}{x}\cdot\frac{1}{x}\cdot dx\right]$. Интеграл $\int\frac{\ln x}{x^2}dx$ решавамо исто као у I начину, па добијамо да је $\int\frac{\ln x}{x^2}dx=-\frac{\ln x+1}{x}$, тј. $z=x\cdot\left(C+\frac{\ln x+1}{x}\right)\Rightarrow z=Cx+\ln x+1$.

Враћањем смене $z=\frac{1}{y}$ добијамо опште решење: $\frac{1}{y}=Cx+\ln x+1\Rightarrow y=\frac{1}{Cx+\ln x+1}$.

НАПОМЕНА: $y=0$ је сингуларно решење претходне једначине.

Бернулијева диференцијална једначина

ЗАДАТАК 13. Решити диф. једначину $y'+2xy=2x^3y^3$.

Решење: Дата једначина је Бернулијева, $\alpha=3$, па ћемо је решити сменом $z=y^{1-\alpha}=y^{-2}$,

тј. $y=z^{-1/2} \Rightarrow y'=-\frac{1}{2}z^{-3/2}\cdot z'$. Заменом у полазну једначину добијамо:

$-\frac{1}{2}z^{-\frac{3}{2}}\cdot z'+2xz^{-\frac{1}{2}}=2x^3\cdot z^{-\frac{3}{2}} \ /\cdot\left(-2z^{\frac{3}{2}}\right) \Rightarrow z'-4x\cdot z=-4x^3$. Добили смо линеарну јед.:

$z=e^{-\int -4x\,dx}\cdot\left[C+\int -4x^3 e^{\int -4x\,dx}\cdot dx\right] \Rightarrow z=e^{4\cdot\frac{x^2}{2}}\cdot\left[C-4\int x^3\cdot e^{-4\frac{x^2}{2}}\cdot dx\right] \Rightarrow z=e^{2x^2}\cdot\left[C-4\int x^3 e^{-2x^2}dx\right] \Rightarrow$

(смена $x^2=t$) $\Rightarrow z=e^{2x^2}\cdot\left[C-2\int t\cdot e^{-2t}dt\right] \Rightarrow (u=t,\ dv=e^{-2t}dt) \Rightarrow z=e^{2x^2}\cdot\left[C-\cancel{2}\left(-\frac{t\cdot e^{-2t}}{\cancel{2}}+\frac{1}{\cancel{2}}\int e^{-2t}dt\right)\right]$

$\Rightarrow z=e^{2x^2}\cdot\left[C+te^{-2t}+\frac{1}{2}e^{-2t}\right] \Rightarrow z=e^{2x^2}\cdot\left(C+x^2e^{-2x^2}+\frac{1}{2}e^{-2x^2}\right) \Rightarrow z=Ce^{2x^2}+x^2+\frac{1}{2}$. Враћањем

смене $z=y^{-2}$, добијамо опште решење: $\frac{1}{y^2}=Ce^{2x^2}+x^2+\frac{1}{2} \Rightarrow \underline{y^2=\frac{1}{Ce^{2x^2}+x^2+1/2}}$.

НАПОМЕНА: $y=0$ је сингуларно решење.

ЗАДАТАК 14. Решити диф. једначину $y'x^3\sin y+2y=xy'$.

Решење: Из дате једначине следи $y'(x^3\sin y-x)=-2y \Rightarrow y'=\frac{2y}{x-x^3\sin y}$, што није Бернулијева једначина по ф-ји $y=y(x)$. Међутим, ако је посматрамо као једначину по ф-ји $x=x(y)$ биће $\frac{1}{x'}=\frac{2y}{x-x^3\sin y} \Rightarrow x'=\frac{x-x^3\sin y}{2y}, y\neq 0 \Rightarrow x'-\frac{1}{2y}x=-\frac{\sin y}{2y}\cdot x^3, y\neq 0$, што јесте Бернулијева једначина ($y=0$ је сингуларно решење). Решавамо је сменом $z=x^{1-3}=x^{-2}$, $z=z(y) \Rightarrow x=z^{-1/2}$ и $x'=-\frac{1}{2}z^{-\frac{3}{2}}\cdot z'$. Имамо:

$-\frac{1}{2}z^{-\frac{3}{2}}\cdot z'-\frac{1}{2y}\cdot z^{-\frac{1}{2}}=-\frac{\sin y}{2y}\cdot z^{-3/2}\Big/\cdot(-2\cdot z^{3/2}) \Rightarrow z'+\frac{1}{y}z=\frac{\sin y}{y}$, што је линеарна једначина.

$\Rightarrow z=e^{-\int\frac{1}{y}dy}\cdot\left[C+\int\frac{\sin y}{y}\cdot e^{\int\frac{1}{y}dy}\cdot dy\right] \Rightarrow \dots \Rightarrow z=\frac{1}{y}\left[C+\int\frac{\sin y}{\cancel{y}}\cdot\cancel{y}\cdot dy\right] \Rightarrow z=\frac{1}{y}(C-\cos y)$.

На крају враћамо смену $z=x^{-2}$: $\frac{1}{x^2}=\frac{C-\cos y}{y} \Rightarrow \underline{x^2=\frac{y}{C-\cos y}}$.

ЗАДАТАК ЗА САМОСТАЛНИ РАД: Решити једначину $(y^2\sin x-1)\cdot dx+2\frac{x}{y}dy=0$.

Резултат: Решење Бернули. једначине $y'-\frac{1}{2x}y=-\frac{\sin x}{2x}y^3$ је $\underline{y^2=\frac{x}{C-\cos x}}$.

$x=0$ је сингуларно решење.

ЈЕДНАЧИНЕ СА ТОТАЛНИМ ДИФЕРЕНЦИЈАЛОМ

Једначина облика $P\cdot dx+Q\cdot dy=0$, $P=P(x,y)$, $Q=Q(x,y)$, за коју важи $P'_y=Q'_x$, зовемо једначином са тоталним диференцијалом (ТД). Решавамо је налажењем ф-је $u=u(x,y)$ чији је тотални диференцијал $du=Pdx+Qdy \Rightarrow du=0 \Rightarrow u=C$ је опште решење. Ф-ју $u=u(x,y)$ налазимо из формуле $u=\int Pdx+\int\left[Q-\frac{\partial}{\partial y}\int Pdx\right]dy$ или $u=\int Qdy+\int\left[P-\frac{\partial}{\partial x}\int Qdy\right]dx$.

ЗАДАТАК 15. Решити диф. једначину $(3x^2+6xy^2)dx+(6x^2y+4y^3)dy=0$.

Решење: Дата ј-на $Pdx+Qdy=0$, $P=3x^2+6xy^2$, $Q=6x^2y+4y^3$ је једначина са ТД јер је

$P'_y=Q'_x=12xy$. Сада је $u=\int Pdx+\int\left[Q-\frac{\partial}{\partial y}\int Pdx\right]dy$, $\int Pdx=\int(3x^2+6xy^2)dx=3\int x^2dx+6y^2\int xdx \Rightarrow$

$\Rightarrow \int Pdx=\cancel{3}\cdot\frac{x^3}{\cancel{3}}+6y^2\cdot\frac{x^2}{2}=x^3+3x^2y^2$, па је $u=(x^3+3x^2y^2)+\int\left[(6x^2y+4y^3)-\frac{\partial}{\partial y}(x^3+3x^2y^2)\right]dy \Rightarrow$

$\Rightarrow u=(x^3+3x^2y^2)+\int\left[(\cancel{6x^2y}+4y^3)-(\cancel{6x^2y})\right]dy \Rightarrow u=x^3+3x^2y^2+\cancel{4}\cdot\frac{y^4}{\cancel{4}}$ (не морамо додавати константу на интеграл, јер би „ушла" у константу C, где је $u=C$). Значи, опште решење је $u=C \Leftrightarrow \underline{x^3+3x^2y^2+y^4=C}$.

Диференцијална једначина са тоталним диференцијалом

ЗАДАТАК 16. Решити диф. једначину $\left(\frac{y}{x^2+y^2}-y\right)dx=\left(x+\frac{x}{x^2+y^2}-e^y\right)dy$.

Решење: Једначина $\left(\frac{y}{x^2+y^2}-y\right)dx+\left(e^y-x-\frac{x}{x^2+y^2}\right)dy=0$ је једначина са ТД, јер је

$P'_y=Q'_x=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}-1$, где је $P=\frac{y}{x^2+y^2}-y$ и $Q=e^y-x-\frac{x}{x^2+y^2}$. Можемо најпре да израчунамо $\int P\,dx=\int\left(\frac{y}{x^2+y^2}-y\right)dx=y\cdot\int\frac{dx}{x^2+y^2}-y\int dx=\cancel{y}\cdot\frac{1}{\cancel{y}}\operatorname{arctg}\frac{x}{y}-yx=\operatorname{arctg}\frac{x}{y}-xy$, као и

$\frac{\partial}{\partial y}\int P\,dx=\frac{\partial}{\partial y}\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{y}-xy\right)=\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\frac{-x}{y^2}-x=\ldots=-\frac{x}{x^2+y^2}-x$. Сада је:

$u=\int P\,dx+\int\left[Q-\frac{\partial}{\partial y}\int P\,dx\right]dy=\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{y}-xy\right)+\int\left[\left(e^y\cancel{-x}\cancel{-\frac{x}{x^2+y^2}}\right)-\left(\cancel{-\frac{x}{x^2+y^2}}\cancel{-x}\right)\right]dy \Rightarrow \ldots \Rightarrow$

$\Rightarrow u=\operatorname{arctg}\frac{x}{y}-xy+e^y$. Опште решење је $u=C$, тј. $\underline{\operatorname{arctg}\frac{x}{y}-xy+e^y=C}$.

ЗАДАТАК ЗА САМОСТАЛНИ РАД: Решити једначину $\left(\frac{xy}{\sqrt{1+x^2}}+2xy-\frac{y}{x}\right)dx+\left(\sqrt{1+x^2}+x^2-\ln x\right)dy=0$.

Резултат: Лева страна дате једначине је ТД функције $u=\left(\sqrt{1+x^2}+x^2-\ln x\right)\cdot y$, па је њено опште решење $u=C$, тј. $\underline{y\left(\sqrt{1+x^2}+x^2-\ln x\right)=C}$.

Интеграциони фактор

У случају да једначина $Pdx+Qdy=0$ није ј-на са ТД, тј. $P'_y \neq Q'_x$, може се наћи ф-ја $\lambda=\lambda(x,y)$ за коју важи $(\lambda P)'_y=(\lambda Q)'_x$, тј. $\lambda P dx+\lambda Q dy=0$ јесте ј-на са ТД. У задацима ће бити наглашено ког је облика ф-ја λ (обично је $\lambda=\lambda(x)$ или $\lambda=\lambda(y)$). λ је интегр. фактор.

Задатак 17. За једначину $(x\sin y+y\cos y)dx+(x\cos y-y\sin y)dy=0$ одредити интеграциони фактор облика $\lambda(x)$, а затим решити једначину.

Решење: Инт. фактор $\lambda=\lambda(x)$ тражимо из услова $[\lambda(x)\cdot(x\sin y+y\cos y)]'_y=[\lambda(x)(x\cos y-y\sin y)]'_x \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda(x)\cdot(x\cos y+\cancel{\cos y}-y\sin y)=\lambda'(x)(x\cos y-y\sin y)+\lambda(x)\cdot(\cancel{\cos y}) \Rightarrow \dots \Rightarrow \lambda(x)=\lambda'(x) \Rightarrow \frac{d\lambda}{dx}=\lambda$

$\Rightarrow \int\frac{d\lambda}{\lambda}=\int dx \Rightarrow \ln|\lambda|=x \Rightarrow \lambda=e^x$. Множењем полазне једначине са $\lambda=e^x$ добијамо једначину са ТД: $e^x(x\sin y+y\cos y)dx+e^x(x\cos y-y\sin y)dy=0$. Као у претходном задатку, израчунајмо најпре $\int P dx=\int e^x(x\sin y+y\cos y)dx=\sin y\cdot\int xe^x dx+y\cos y\int e^x dx$.

Како је $\int xe^x dx = (x-1)e^x$ (парцијалном интеграцијом), имаћемо $\int P dx = \sin y \cdot (x-1)e^x +$ $+ y\cos y \cdot e^x = e^x \cdot ((x-1)\sin y + y\cos y)$, као и $\frac{\partial}{\partial y}\int P dx = e^x((x-1)\cos y + \cos y - y\sin y) = e^x(x\cos y - y\sin y) = Q$.

На крају је $u = \int P dx + \int [Q - \frac{\partial}{\partial y}\int P dx] dy = e^x((x-1)\sin y + y\cos y) + \int 0 \cdot dy = e^x((x-1)\sin y + y\cos y)$, па је $e^x \cdot ((x-1)\sin y + y\cos y) = C$ опште решење дате једначине.

ЗАДАТАК 18. За једначину $2xy \cdot \ln y \cdot dx + (x^2 + y^2\sqrt{y^2+1}) \cdot dy = 0$ одредити интеграциони фактор облика $\lambda(y)$, а затим решити једначину.

Решење: Из $[\lambda(y) \cdot 2xy \ln y]'_y = [\lambda(y) \cdot (x^2 + y^2\sqrt{y^2+1})]'_x$ следи $\lambda'(y) \cdot 2xy\ln y + \lambda(y) \cdot 2x\ln y + \lambda(y) \cdot 2xy \cdot \frac{1}{y} = \lambda(y) \cdot 2x$

$\Rightarrow \lambda'(y) \cancel{2x} y \ln y = -\lambda(y) \cancel{2x\ln y} \Rightarrow \int \frac{d\lambda}{\lambda} = -\int \frac{dy}{y} \Rightarrow \ln|\lambda| = -\ln|y| \Rightarrow \lambda = y^{-1} = \frac{1}{y}$. Множењем полазне ј-не са $\lambda = \frac{1}{y}$ добијамо једначину са ТД: $2x\ln y \cdot dx + (\frac{x^2}{y} + y\sqrt{y^2+1}) \cdot dy = 0$.

Сада је $\int P dx = \int 2x\ln y\, dx = 2\ln y \cdot \frac{x^2}{2} = x^2 \ln y$ и $\frac{\partial}{\partial y}\int P dx = \frac{x^2}{y}$, па је

$u = \int P dx + \int [Q - \frac{\partial}{\partial y}\int P dx] dy = \ldots = x^2 \ln y + \int y\sqrt{y^2+1} \cdot dy = (t = y^2+1) = \ldots = x^2 \ln y + \frac{\sqrt{y^2+1}^3}{3}$.

Опште решење је $u = C$, тј. $\underline{x^2 \ln y + \frac{1}{3}\sqrt{x^2+1}^3 = C}$.

ЗАДАТАК ЗА САМОСТАЛНИ РАД: За једначину $(x^2y+y+1)dx+(x^3+x)dy=0$ одредити инт. фактор облика $\lambda(x)$, а затим решити једначину.

Резултат: Добија се $\lambda(x)=\frac{1}{1+x^2}$, а одатле опште решење $\underline{xy+\operatorname{arctg}x=C}$.

ЗАДАТАК ЗА САМОСТАЛНИ РАД: За једначину $(y\sin 2x+xy^2)dx+(y^3-\sin^2x)dy=0$ одредити интеграциони фактор облика $\lambda(y)$, а затим решити једначину.

Резултат: Добија се $\lambda(y)=\frac{1}{y^2}$, а одатле опште решење $\underline{\frac{x^2+y^2}{2}+\frac{1}{y}\sin^2x=C}$.

Математика 3 - вежбе

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
ФАКУЛТЕТ ОРГАНИЗАЦИОНИХ НАУКА

Небојша Николић