1 Решити систем диф. јед.
$$\begin{aligned} x' &= 3x - y + z \\ y' &= -2x + 4y - 2z \\ z' &= -2x + 2y \end{aligned}.$$

Решење: $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A - \lambda I = \begin{bmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ -2 & 4-\lambda & -2 \\ -2 & 2 & -\lambda \end{bmatrix}$. Сопствене вредности матрице A су решења једначине $\det(A-\lambda I)=0$, tj. $\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ -2 & 4-\lambda & -2 \\ -2 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow [(3-\lambda)(4-\lambda)(-\lambda) - 4 - 4] - [-2(4-\lambda) - 4(3-\lambda) - 2\lambda] = 0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow -(\lambda-3)(\lambda-2)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2}=2,\ \lambda_3=3.$$

За „двоструку" сопствену вредност $\lambda_{1,2}=2$ тражимо два независна решења система:

$$\begin{aligned} (A-\lambda_{1,2}I)\cdot M_2 &= 0 \\ (A-\lambda_{1,2}I)\cdot M_1 &= M_2 \end{aligned}, \text{ где су } M_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix} \text{ и } M_2 = \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} a_2 - b_2 + c_2 &= 0 \\ -2a_2 + 2b_2 - 2c_2 &= 0 \\ -2a_2 + 2b_2 - 2c_2 &= 0 \\ a_1 - b_1 + c_1 &= a_2 \\ -2a_1 + 2b_1 - 2c_1 &= b_2 \\ -2a_1 + 2b_1 - 2c_1 &= c_2 \end{aligned}\right\}$$

$$\begin{aligned} &a_2 - b_2 + c_2 = 0 \\ &a_1 - b_1 + c_1 = a_2 = -\tfrac{1}{2}b_2 = -\tfrac{1}{2}c_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &a_2 - (-2a_2) + (-2a_2) = 0,\ b_2 = -2a_2,\ c_2 = -2a_2 \\ &a_1 - b_1 + c_1 = a_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &a_2 = 0,\ b_2 = 0,\ c_2 = 0 \\ &a_1 - b_1 + c_1 = a_2 \end{aligned}$$

$$a_1 - b_1 + c_1 = 0,\ a_2 = b_2 = c_2 = 0$$

$$\begin{aligned} &b_1 = a_1 + c_1;\ a_1, c_1 \in \mathbb{R} \\ &a_2 = b_2 = c_2 = 0 \end{aligned}$$ двопараметарско решење!

1. $\left.\begin{aligned} &a_1 = 1,\ c_1 = 0 \Rightarrow b_1 = 1 \\ &a_2 = b_2 = c_2 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow X_1 = (M_1 + M_2 t)e^{\lambda_{1,2}t} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} t\right)\cdot e^{2t} \Rightarrow \underline{X_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{2t}$

2. $\left.\begin{aligned} &a_1 = 0,\ c_1 = 1 \Rightarrow b_1 = 1 \\ &a_2 = b_2 = c_2 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow X_2 = (M_1 + M_2 t)e^{\lambda_{1,2}t} = \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} t\right)\cdot e^{2t} \Rightarrow \underline{X_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t}$

За сопствену вредност $\lambda_3 = 3$ тражимо сопствени вектор $M = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ из система:

$$(A - \lambda_3 I)\cdot M = 0$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} -b + c &= 0 \\ -2a + b - 2c &= 0 \\ -2a + 2b - 3c &= 0 \end{aligned}\right\} \quad b = c, \quad -2a - c = 0, \quad a = -\frac{c}{2}$$

$$\Rightarrow M = \begin{bmatrix} -\frac{c}{2} \\ c \\ c \end{bmatrix} \xrightarrow{c=2} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow X_3 = M\cdot e^{\lambda_3 t}$$

$$\Rightarrow \underline{X_3} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}\cdot e^{3t}$$

На крају, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = C_1X_1 + C_2X_2 + C_3X_3 = C_1\begin{bmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \\ 0 \end{bmatrix} + C_2\begin{bmatrix} 0 \\ e^{2t} \\ e^{2t} \end{bmatrix} + C_3\begin{bmatrix} -e^{3t} \\ 2e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{bmatrix} \Rightarrow \ldots \Rightarrow$

$$\begin{aligned} x &= C_1e^{2t} - C_3e^{3t} \\ y &= C_1e^{2t} + C_2e^{2t} + 2C_3e^{3t} \\ z &= C_2e^{2t} + 2C_3e^{3t} \end{aligned}$$

2 Решити систем диф. јед.
$$\begin{aligned} x' &= -x \qquad\;\; -5z \\ y' &= x + y - z \\ z' &= x \qquad\;\; + z \end{aligned}$$

Решење: $A=\begin{bmatrix}-1 & 0 & -5\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix} \Rightarrow A-\lambda I=\begin{bmatrix}-1-\lambda & 0 & -5\\ 1 & 1-\lambda & -1\\ 1 & 0 & 1-\lambda\end{bmatrix}$. Сопствене вредности матрице A су решења једначине $\det(A-\lambda I)=0$, тј. $\begin{vmatrix}-1-\lambda & 0 & -5\\ 1 & 1-\lambda & -1\\ 1 & 0 & 1-\lambda\end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow [-(\lambda+1)(\lambda-1)^2+0+0]-[5(\lambda-1)+0+0]=0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow -(\lambda-1)(\lambda^2+4)=0 \Rightarrow \underline{\lambda_{1,2}=\pm 2i,\ \lambda_3=1.}$

За сопствену вредност, нпр. $\lambda_1=2i\notin\mathbb{R}$, тражимо сопствени вектор $M=\begin{bmatrix}a\\ b\\ c\end{bmatrix}$ из система: $\underline{(A-\lambda_1 I)\cdot M=0}$

$$\begin{bmatrix}-1-2i & 0 & -5\\ 1 & 1-2i & -1\\ 1 & 0 & 1-2i\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}a\\ b\\ c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix} \qquad \left.\begin{aligned}(1+2i)a \qquad\quad +5c &= 0\\ a+(1-2i)b-c &= 0\\ a \qquad\quad +(1-2i)c &= 0\end{aligned}\right\} \to a=(-1+2i)c$$

$$(1-2i)b=c-a \to \dots \to b=\frac{6+2i}{5}c \quad \Rightarrow$$

$\Rightarrow M=\begin{bmatrix}(-1+2i)c\\ \frac{6+2i}{5}c\\ c\end{bmatrix} \overset{c=5}{=} \begin{bmatrix}-5+10i\\ 6+2i\\ 5\end{bmatrix} \Rightarrow X_{ком}=M\cdot e^{\lambda_1 t}=\begin{bmatrix}-5+10i\\ 6+2i\\ 5\end{bmatrix}e^{2it}=\begin{bmatrix}-5+10i\\ 6+2i\\ 5\end{bmatrix}(\cos 2t+i\sin 2t)=\dots=$

$=\underbrace{\begin{bmatrix}-5\cos 2t-10\sin 2t\\ 6\cos 2t-2\sin 2t\\ 5\cos 2t\end{bmatrix}}_{=X_1}+i\underbrace{\begin{bmatrix}10\cos 2t-5\sin 2t\\ 2\cos 2t+6\sin 2t\\ 5\sin 2t\end{bmatrix}}_{=X_2}$, где је $X_1=Re(X_{ком})$, $X_2=Im(X_{ком})$.

За сопствену вредност $\lambda_3=1$ тражимо сопствени вектор $M=\begin{bmatrix}a\\ b\\ c\end{bmatrix}$ из система: $\underline{(A-\lambda_3 I)\cdot M=0}$

$$\begin{bmatrix}-2 & 0 & -5\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}a\\ b\\ c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix} \qquad \left.\begin{aligned}-2a \qquad -5c &= 0\\ a \qquad -c &= 0\\ a \qquad\quad &= 0\end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned}a=c=0\\ b\in\mathbb{R}\end{aligned} \Rightarrow M=\begin{bmatrix}0\\ b\\ 0\end{bmatrix} \overset{b=1}{=} \begin{bmatrix}0\\ 1\\ 0\end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X_3=M\cdot e^{\lambda_3 t} \Rightarrow \underline{X_3}=\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 0\end{bmatrix}e^{1\cdot t}$$

На крају, $X=C_1X_1+C_2X_2+C_3X_3=C_1\begin{bmatrix}-5\cos 2t-10\sin 2t\\ 6\cos 2t-2\sin 2t\\ 5\cos 2t\end{bmatrix}+C_2\begin{bmatrix}10\cos 2t-5\sin 2t\\ 2\cos 2t+6\sin 2t\\ 5\sin 2t\end{bmatrix}+C_3\begin{bmatrix}0\\ e^t\\ 0\end{bmatrix}$,

$$\Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{aligned} x &= C_1(-5\cos 2t-10\sin 2t)+C_2(10\cos 2t-5\sin 2t)\\ y &= C_1(6\cos 2t-2\sin 2t)+C_2(2\cos 2t+6\sin 2t)+C_3e^t\\ z &= C_1\cdot 5\cos 2t \qquad +C_2\cdot 5\sin 2t\end{aligned}$$

② Решити систем
$$\left.\begin{aligned} x' &= x - y \\ y' &= 2x + y + z \\ z' &= 2y + z \end{aligned}\right\}$$

Решење: Из матрице система $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = A$, добијамо карактеристичан полином:

$\det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} (1-\lambda) & -1 & 0 \\ 2 & (1-\lambda) & 0 \\ 0 & 2 & (1-\lambda) \end{vmatrix} = \ldots = (1-\lambda)^3$, па је $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$ сопств. вредност, вишеструкости 3.

Партикуларна решења тражимо у облику (*): $X_i = (M_1+M_2t+M_3t^2)\cdot e^{\lambda_i t}$; $i\in\{1,2,3\}$. Заменом у базни систем ($X_i' = A\cdot X_i$ – у матричном запису) добијамо да је

$X_i' = (M_2+2M_3t)e^{\lambda_i t} + (M_1+M_2t+M_3t^2)e^{\lambda_i t} = A\cdot(M_1+M_2t+M_3t^2)e^{\lambda_i t}$, тј. $(M_1+M_2)+(M_2+2M_3)t+M_3t^2 =$
$= A\cdot M_1 + AM_2t + A\cdot M_3\cdot t^2$, тј. добијамо систем ...
$$\left.\begin{aligned} (A-\lambda_iE)\cdot M_3 &= 0 \\ (A-\lambda_iE)\cdot M_2 &= 2M_3 \\ (A-\lambda_iE)\cdot M_1 &= M_2 \end{aligned}\right\}.$$
Узевши да је $M_1=\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix}$, $M_2=\begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix}$ и $M_3=\begin{bmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{bmatrix}$, у развијеном облику систем гласи:
$$\left.\begin{aligned} -b_3 &= 0 \\ 2a_3 + c_3 &= 0 \\ 2b_3 &= 0 \end{aligned}\right\}\quad \left.\begin{aligned} -b_2 &= 2a_3 \\ 2a_2 + c_2 &= 2b_3 \\ 2b_2 &= 2c_3 \end{aligned}\right\}\quad \left.\begin{aligned} -b_1 &= a_2 \\ 2a_1 + c_1 &= b_2 \\ 2b_1 &= c_2 \end{aligned}\right\}.$$
Добијени систем се може решити по параметрима a_1, a_2 и a_3: $\begin{aligned} b_3&=0 \\ c_3&=-2a_3 \end{aligned}$, $\begin{aligned} b_2&=-2a_3 \\ c_2&=-2a_2 \end{aligned}$ и $\begin{aligned} b_1&=-a_2 \\ c_1&=-2a_3-2a_1 \end{aligned}$. Узимајући редом вредност параметара: 1° $\begin{aligned} a_1&=1 \\ a_2&=0 \\ a_3&=0 \end{aligned}$, 2° $\begin{aligned} a_1&=0 \\ a_2&=1 \\ a_3&=0 \end{aligned}$, 3° $\begin{aligned} a_1&=0 \\ a_2&=0 \\ a_3&=1 \end{aligned}$, добијамо:

1° $M_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$, $M_2=M_3=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \xRightarrow{(*)} X_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}e^{1\cdot t}$

2° $M_1=\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $M_2=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$, $M_3=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \xRightarrow{(*)} X_2=\begin{bmatrix} t \\ -1 \\ -2t \end{bmatrix}e^{1\cdot t}$

3° $M_1=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$, $M_2=\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $M_3=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \xRightarrow{(*)} X_3=\begin{bmatrix} t^2 \\ -2t \\ -2-2t \end{bmatrix}e^{1t}$

$$\Rightarrow X = C_1X_1 + C_2X_2 + C_3X_3$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 + C_2t + C_3t^2 \\ -C_2 - C_3\cdot 2t \\ -C_1\cdot 2 - C_2\cdot 2t - C_3(2+2t) \end{bmatrix}\cdot e^t}$$