МАТЕМАТИКА 1

1. Колоквијум, новембар 2011 - Група Л

Драган Ђорић

1. Нека је
$$\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} b & 0 & a \\ 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} : \ a, \ b, \ c \in \mathbb{R}, \ b \neq 0 \ \right\}.$$
Испитати да ли је $(\mathcal{M}, \cdot)$ група.

Решење:

1. *Операција множења матрица је затворена у скупу* $\mathcal{M}$. Ако је $M_{a,b,c} = \begin{pmatrix} b & 0 & a \\ 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$, тада је $M_{a,b,c} \cdot M_{x,y,z} = M_{ay+bx,by,bz+cy}$. Како $ay+bx, by, bz+cy \in \mathbb{R}$ за $a, b, c, x, y, z \in \mathbb{R}$ и како је $by \neq 0$ за $b \neq 0$ и $y \neq 0$, то $M_{ay+bx,by,bz+cy} \in \mathcal{M}$.
2. *Операција је у скупу* $\mathcal{M}$ *комутативна* јер је $ay + bx = xb + ya$, $by = yb$ и $bz + cy = yc + zb$.
3. *Операција је асоцијативна* јер асоцијативност за множење матрица важи у општем случају.
4. *Свака матрица из* $\mathcal{M}$ *има инверзну матрицу која припада* $\mathcal{M}$. Како је $M_{a,b,c}^{-1} = M_{-a/b^2,1/b,-c/b^2}$ и како је $-a/b^2, 1/b, -c/b^2 \in \mathbb{R}$ и $1/b \neq 0$ за $a, b, c \in \mathbb{R}$ и $b \neq 0$, то матрица $M_{a,b,c}^{-1}$ припада скупу $\mathcal{M}$.

На основу (1)-(5) следи да је структура $(\mathcal{M}, \cdot)$ Абелова група.

2. Израчунати детерминанту $D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & x & y & x+y \\ 0 & y & x+y & x \\ 0 & x+y & x & y \end{vmatrix}$, при чему су x и y реални бројеви.

Решење: Развојем дате детерминанте по првој колони добијамо
$$D = \begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} x+y & y & x+y \\ x+y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} x+y & y & x+y \\ 0 & x & -y \\ 0 & x-y & -x \end{vmatrix} = -2(x^3+y^3).$$

3. У зависности од реалног параметра λ решити систем
$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x & - & y & + & z & + & u & = & 1 \\ x & + & 2y & - & z & + & 4u & = & 2 \\ x & + & 7y & - & 4z & + & 11u & = & \lambda. \end{array}$$

Решење: Лако се налази да је ранг матрице датог система једнак 2, а да ранг проширене матрице система зависи од λ (ако је $\lambda = 5$, он је једнак 2, а ако је $\lambda \neq 5$, он је једнак 3. Према томе,

(1) За $\lambda \neq 5$ систем није сагласан (Кронекер-Капелијева теорема).

(2) За $\lambda = 5$ дати систем је еквивалентан систему

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & - & z & + & 4u & = & 2 \\ & - & 5y & + & 3z & - & 7u & = & -3 \end{array}$$

који има двопараметарски скуп решења. Ако су z и u слободне промењљиве, тада је

$$x = \frac{1}{5}(4 - z - 6u), \quad y = \frac{1}{5}(3z - 7u + 3).$$

4. Дата су 3 узастопна темена паралелграма $ABCD$: $A(0,1,0)$, $B(1,\lambda,1)$ и $C(0,2,1)$, где је λ реалан параметар.

а) Одредити координате четвртог темена паралелограма D.

б) Израчунати векторски производ $\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}$.

в) Одредити вредности λ тако да је површина паралелограма $ABCD$ једнака $\sqrt{3}$.

г) За најмању вредност λ одређену под в) израчунати дужину висине из темена C на страницу AB, као и величину угла CAB.

Решење: **а)** Из $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ следи да је четврто теме $D(-1, 3-\lambda, 0)$.

б) Како је $\overrightarrow{BA} = (-1, 1-\lambda, -1)$ и $\overrightarrow{BC} = (-1, 2-\lambda, 0)$, то је

$$\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda & 0 \end{vmatrix} = (2-\lambda)i + j - k = (2-\lambda, 1, -1).$$

в) Из једнакости $|\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}| = 3$ добијамо једнакост $(2-\lambda)^2 = 1$. Према томе, $\lambda \in \{1, 3\}$.

г) За $\lambda = 1$ је $\overrightarrow{AB} = (1,0,1)$ и $\overrightarrow{AC} = (0,1,1)$, па из $\cos\sphericalangle CAB = \dfrac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{AB}|} = \dfrac{1}{2}$ добијамо да је $\sphericalangle CAB = \dfrac{\pi}{3}$. Према томе, троугао ABC је једнакостранични (дужина странице је $\sqrt{2}$), па је дужина његове висине једнака $\sqrt{3/2}$.

5. Дате су раван α и раван β у простору:

$$\alpha\colon 2x + y - z - 2 = 0 \qquad \text{и} \qquad \beta\colon x - y + z + 5 = 0.$$

а) Одредити вектор нормале $\vec{n}_\alpha$ на раван α и вектор нормале $\vec{n}_\beta$ на раван β.

б) Одредити произвољне тачке $A \in \alpha$ и $B \in \beta$.

в) Одредити међусобни положај равни α и равни β.

г) Уколико се раван α и раван β секу одредити њихов пресек, а ако се не секу одредити њихово међусобно растојање.

д) Одредити растојање од координатног почетка O до равни α, $d(O,\alpha)$.

Решење: **а)** На пример, $n_\alpha = (2,1,-1)$ и $n_\beta = (1,-1,1)$.

б) На пример, $A(1,0,0) \in \alpha$ и $B(5,0,0) \in \beta$.

в) Обзиром да вектори n_α и n_β нису колинеарни, равни α и β имају заједничку праву.

г) Решење система $2x + y - z - 2 = 0$ и $x - y + z + 5 = 0$ је једнопараметарски скуп $\{(-1, z+4, z) \ : \ z \in \mathbb{R}\}$ који одређује заједничку праву p равни α и β. Према томе, параметарски облик једначине праве p је $x = -1$, $y = t + 4$, $z = t$, а њен канонски облик је $\dfrac{x+1}{0} = \dfrac{y-4}{1} = \dfrac{z}{1}$.

д) $d(O,\alpha) = \dfrac{|2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 - 1 \cdot 0 - 2|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \dfrac{2}{\sqrt{6}} = \dfrac{1}{3}\sqrt{6}.$