МАТЕМАТИКА 1

1. Колоквијум, новембар 2012 - Група 7

Драган Ђорић

1. Нека је $\mathcal{A} = \{(a,b) \,:\, a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R},\ b \neq 0\}$ и нека је операција $*$ дефинисана са

$$(a,b) * (c,d) = (ad + c + d, bd), \quad (a,b),(c,d) \in \mathcal{A}.$$

Испитати да ли је $(\mathcal{A}, *)$ група и ако јесте да ли је и Абелова.

Решење:

1. *Операција $*$ је затворена у скупу $\mathcal{A}$* јер из $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ следи $ad + c + d, bd \in \mathbb{R}$, а из $b \neq 0$ и $d \neq 0$ следи да је $bd \neq 0$.

2. *Операција $*$ је асоцијативна* јер је

$$((a,b) * (c,d)) * (e,f) = (ad + c + d, bd) * (e,f) = (adf + cf + df + e + f, bdf)$$

и

$$(a,b) * ((c,d) * (e,f)) = (a,b) * (cf + e + f, df) = (adf + cf + e + f + df, bdf).$$

3. Из једнакости $(a,b) * (e_1, e_2) = (a,b)$, односно $(ae_2 + e_1 + e_2, be_2) = (a,b)$, добијамо да је $e_2 = 1$ и $e_1 = -1$. Како је $(-1,1) * (a,b) = (-b + a + b, b) = (a,b)$ и $(-1,1) \in \mathcal{A}$, то је $(-1,1)$ *неутрални елемент у односу на операцију $*$*.

4. Обзиром да је $b \neq 0$ за свако $(a,b) \in \mathcal{A}$, из једнакости $(a,b) * (u,v) = (-1,1)$, односно $(av + u + v, bv) = (-1,1)$ имамо да је $u = -(1 + a + b)/b$ и $v = 1/b$ и $(u,v) \in \mathcal{A}$. Како је још и

$$\left(-\frac{1 + a + b}{b}, \frac{1}{b}\right) * (a,b) = (-1 - a - b + a + b, 1) = (-1,1),$$

сваки елемент (a,b) скупа $\mathcal{A}$ има свој инверзни елемент.

На основу (1)-(4) следи да је структура $(\mathcal{A}, *)$ група. Међутим, из једнакости

$$(2,2) * (1,1) = (4,2), \quad (1,1) * (2,2) = (6,2)$$

следи да $*$ није комутативна операција, па структура $(\mathcal{A}, *)$ није Абелова група.

2. Одредити ранг матрице A у зависности од реалног параметра a ако је

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 14 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 5 & 7 & a \end{bmatrix}.$$

Решење: Пошто је матрица A типа 4×5, њен ранг може бити највише 4. Да ли је 4? У главном минору реда 4 не фигурише параметар a, па можемо проверити да ли он одређује ранг дате матрице. Развојем по другој колони имамо да је

$$M_4 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 14 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 5 & 7 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 & 14 \\ 1 & 1 & 2 \\ -3 & 5 & 7 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \end{vmatrix} = -93 + 3 \cdot (-47) = -234.$$

Дакле, пун погодак! Како је $M_4 \neq 0$, то је $r(A) = 4$ независно од вредности параметра a (упркос тексту задатка!).

3. У зависности од реалног параметра a решити систем

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & z & = & 1 \\ 2x & + & ay & + & 4z & = & 3 \\ -x & + & (-a-1)y & + & az & = & -2. \end{array}$$

Решење: Нека је D детерминанта матрице датог система. Како је $D = (a+2)(a+3)$, постоје три случаја.

(1) За $a \notin \{-3, -2\}$ систем има јединствено решење $(x, y, z) = (D_x/D, D_y/D, D_z/D)$, где је

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & a & 4 \\ -2 & -a-1 & a \end{vmatrix} = (a+3)^2, \quad D_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = a+3, \quad D_z = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & a & 3 \\ -1 & -a-1 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

Дакле, у овом случају је $(x, y, z) = \left(\frac{a+3}{a+2}, \frac{1}{a+2}, 0\right)$.

(2) За $a = -2$ дати систем нема решења јер је $D_y = 1 \neq 0$.

(3) За $a = -3$ дати систем еквивалентан је систему

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & z & = & 1 \\ & & y & - & 2z & = & -1 \end{array}$$

који има једнопараметарски скуп решења. Ако је z слободна променљива, тада је $x = z$ и $y = 2z - 1$. Дакле, у овом случају, $(x, y, z) \in \{(\alpha, 2\alpha - 1, \alpha),\ \alpha \in \mathbb{R}\}$.

4. Дате су праве $p : \dfrac{x-2}{\lambda} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-1}{1}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ и $q : \begin{cases} x - 2y + z + 1 &= 0 \\ 2x + y - 3z + 2 &= 0 \end{cases}$ и тачка $M(4, 0, 1)$.

а) Одредити параметар λ тако да се праве p и q секу.

б) За тако добијену вредност λ израчунати растојање тачке M од равни одређене правама p и q.

Решење: Нека су n_p и n_q вектори праваца правих p и q, нека је α раван одређена правама p и q и нека је n_α вектор нормале равни α.

а) Како је $\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 5i + 5j + 5k$ и $Q(-1, 0, 0) \in q$, једначина праве q је $\dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{1}$.

Из услова

$$[n_p, n_q, \overrightarrow{QP}] = \begin{vmatrix} \lambda & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

где је $P(2, 2, 1)$ тачка праве p, добијамо да је $\lambda = 3$.

б) Како је $n_\alpha = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = i - 2j + k$ и $Q \in \alpha$, једначина равни α је $x - 2y + z + 1 = 0$.

Према формули за растојање тачке од равни имамо да је

$$d(M, \alpha) = \frac{|4 - 2 \cdot 0 + 1 + 1|}{\sqrt{1 + 4 + 1}} = \sqrt{6}.$$