МАТЕМАТИКА 1

1. Колоквијум, новембар 2014 - Група 6

Драган Ђорић

1. Нека је $\mathcal{M} = \{(x,y) \,:\, x,y \in \mathbb{R},\ x^2 - 7y^2 \neq 0\}$ и нека је операција $*$ дефинисана са

$$(x,y) * (a,b) = (xa + 7yb, xb + ya)$$

за све $(x,y), (a,b) \in \mathcal{M}$. Испитати да ли је $(\mathcal{M}, *)$ група. Да ли је дата операција комутативна?

Решење. Докажимо да је $(\mathcal{M}, *)$ Абелова група.

1. *Операција $*$ је затворена у скупу $\mathcal{M}$.* Ако је $(x,y) * (a,b) = (u,v)$, тада из $a,b,x,y \in \mathbb{R}$ следи да је $u = xa + 7yb \in \mathbb{R}$ и $v = xb + ya \in \mathbb{R}$.

   Треба још проверити да ли је $u^2 - 7v^2 \neq 0$ за $(x,y) \in \mathcal{M}$ и $(a,b) \in \mathcal{M}$. Како је

   $$\begin{aligned} u^2 - 7v^2 &= (xa + 7yb)^2 - 7(xb + ya)^2 \\ &= x^2a^2 + 14xayb + 7^2y^2b^2 - 7x^2b^2 - 14xbya - 7y^2a^2 \\ &= x^2(a^2 - 7b^2) + 7y^2(7b^2 - a^2) \\ &= (a^2 - 7b^2)(x^2 - 7y^2) \end{aligned}$$

   и како је $a^2 - 7b^2 \neq 0$ и $x^2 - 7y^2 \neq 0$, то је и $u^2 - 7v^2 \neq 0$.

   Према томе, $(u,v) \in \mathcal{M}$.

2. *Операција је у скупу $\mathcal{M}$ комутативна* јер је

   $$(a,b) * (x,y) = (ax + 7by, ay + bx) = (u,v).$$

3. *Операција $*$ је асоцијативна*. За $(x,y), (a,b), (c,d) \in \mathcal{M}$ је

   $$[(x,y) * (a,b)] * (c,d) = (u,v) * (c,d) = (p,q),$$

   где је

   $$p = uc + 7vd = (ax + 7yb)c + 7(xb + ya)d = axc + 7ybc + 7xbd + 7yad,$$
   $$q = ud + vc = (ax + 7yb)d + (xb + ya)c = axd + 7ybd + xbc + yac.$$

   С друге стране, имамо да је

   $$(x,y) * [(a,b) * (c,d)] = (x,y) * (s,t) = (g,h),$$

   где је

   $$g = xs + 7yt = x(ac + 7bd) + 7y(ad + bc) = xac + 7bdx + 7yad + 7ybc,$$
   $$h = xt + ys = x(ad + bc) + y(ac + 7bd) = xad + xbc + yac + 7ybd.$$

   Како је $p = g$ и $q = h$, операција $*$ је асоцијативна.

4. *Јединични елемент је* $(1,0)$ јер је $1, 0 \in \mathbb{R}$, $1^2 \neq 7 \cdot 0^2$ и важи

   $$(x,y) * (1,0) = (1,0) = (x,y)$$

   за сваки елемент $(x,y) \in \mathcal{M}$.

5. *Сваки елемент (x,y) скупа $\mathcal{M}$ има свој инверзни елемент.* Из једнакости $(x,y)*(a,b)=(1,0)$ следи да је $ax+7yb=1$ и $xb+ya=0$. Детерминанта овог система (по a и b) је

$$\begin{vmatrix} x & 7y \\ y & x \end{vmatrix} = x^2-7y^2 \neq 0,$$

па систем има јединствено решење

$$a=\frac{x}{x^2-7y^2}, \quad b=-\frac{y}{x^2-7y^2}.$$

Како је $a,b\in\mathbb{R}$ и $a^2-7b^2=\dfrac{1}{x^2-7y^2}\neq 0$, то је $(a,b)\in\mathcal{M}$. Наравно, због комутативности важи и $(a,b)*(x,y)=(1,0)$. Према томе, елемент (a,b) је инверзни за елемент (x,y).

На основу (1)-(5) следи да је структура $(\mathcal{M},*)$ Абелова група.

2. У зависности од вредности параметара p и q одредити ранг матрице

$$A=\begin{bmatrix} -3 & 3 & 2 & 1 & 5 \\ p+3 & 10 & -1 & -1 & -6 \\ -p-12 & -1 & pq+13 & 4 & q+19. \end{bmatrix}.$$

Решење: Нека је r ранг дате матрице. Минор $\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -6 \end{vmatrix}$ је различит од нуле, па је $r\geq 2$. Како је

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 10 & -1 & -6 \\ -1 & 4 & q+19 \end{vmatrix} = -13q+26,$$

то је $r=3$ за $q\neq 2$.

За $q=2$ имамо да је

$$A=\begin{bmatrix} -3 & 3 & 2 & 1 & 5 \\ p+3 & 10 & -1 & -1 & -6 \\ -p-12 & -1 & 2p+13 & 4 & 21 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -3 & 3 & 2 & 1 & 5 \\ p & 13 & 1 & 0 & -1 \\ -p & -13 & 2p+5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\sim \begin{bmatrix} -3 & 3 & 2 & 1 & 5 \\ p & 13 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2p+6 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & -3 & 5 \\ 0 & 13 & 1 & p & -1 \\ 0 & 0 & 2p+6 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Из последње матрице видимо да је $r=3$ за $2p+6\neq 0$ и $r=2$ за $p=-3$.

Према томе, $r=2$ за $(p,q)=(-3,2)$ и $r=3$ за $(p,q)\neq(-3,2)$.

3. У зависности од вредности реалног параметра a дискутовати и решити систем

$$\begin{aligned} 2x &+ (a+1)y &+ 2(a+1)z &= 1 \\ 2ax &+ 2y &+ (3a+1)z &= 1 \\ 2ax &+ 2ay &+ (3a+1)z &= a. \end{aligned}$$

Решење: Нека је D детерминанта матрице датог система. Како је

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 2a+2 & a+1 \\ 2a & 2 & 3a+1 \\ 2a & 2a & 3a+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & a+1 & 2a+2 \\ 2a & 2 & 3a+1 \\ 0 & 2a-2 & 0 \end{vmatrix} = -(2a-2)\begin{vmatrix} 2 & 2a+2 \\ 2a & 3a+1 \end{vmatrix} = 4(a-1)^2(2a+1),$$

постоје три случаја.

(1) За $m \notin \{-1/2, 1\}$ систем има јединствено решење $(x,y,z) = \left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D}, \frac{D_z}{D}\right)$, где је

$$\begin{aligned} D_x &= \begin{vmatrix} 1 & a+1 & 2a+2 \\ 1 & 2 & 3a+1 \\ a & 2a & 3a+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a+1 & 2a+2 \\ 1 & 2 & 3a+1 \\ a-1 & 2a-2 & 0 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & a-1 & 2a+2 \\ 1 & 0 & 3a+1 \\ a-1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (a-1)\begin{vmatrix} a-1 & 2a+2 \\ 0 & 3a+2 \end{vmatrix} = (a-1)^2(3a+1), \end{aligned}$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2a+2 \\ 2a & 1 & 3a+1 \\ 2a & a & 3a+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2a+2 \\ 2a & 1 & 3a+1 \\ 0 & a-1 & 0 \end{vmatrix} = -(a-1)\begin{vmatrix} 2 & 2a+2 \\ 2a & 3a+1 \end{vmatrix} = 2(a-1)^2(2a+1),$$

$$\begin{aligned} D_z &= \begin{vmatrix} 2 & a+1 & 1 \\ 2a & 2 & 1 \\ 2a & 2a & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & a+1 & 1 \\ 2a & 2 & 1 \\ 0 & 2a-2 & a-1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 2 & a-1 & 1 \\ 2a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 \end{vmatrix} = (a-1)\begin{vmatrix} 2 & a-1 \\ 2a & 0 \end{vmatrix} = -2a(a-1)^2. \end{aligned}$$

Дакле, у овом случају је $(x,y,z) = \left(\frac{1}{4}\cdot\frac{3a+1}{2a+1}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2a+1}\right)$.

(2) За $a = -1/2$ дати систем нема решења јер је $D = 0$ и $D_z = 9/4 \neq 0$.

(3) За $a = 1$ дати систем еквивалентан је једначини $2x + 2y + 4z = 1$, па систем има двопараметарски скуп решења. Дакле, у овом случају,

$$(x,y,z) \in \{(1/2 - \alpha - 2\beta, \alpha, \beta)\,,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

4. У векторском простору $V = (\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, \cdot)$ дати су вектори

$$a = (1,2,3), \quad b = (1,1,-2), \quad c = (0,2,-6), \quad d = (1,-1,1).$$

а) Доказати да вектори a, b и c чине базу векторског простора V.

б) Изразити вектор d као линеарну комбинацију вектора a, b и c.

Решење: **а)** Пошто је $dim(V) = 3$, довољно је доказати да су вектори a, b и c линеарно независни. Из једнакости $\alpha a + \beta b + \gamma c = 0$ добијамо хомоген систем

$$\alpha + \beta = 0, \quad 2\alpha + \beta + 2\gamma = 0, \quad 3\alpha - 2\beta - 6\gamma = 0$$

који има тривијално решење ако и само ако је детерминанта D матрице система различита од нуле. Како је

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & -5 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -5 & -6 \end{vmatrix} = 16 \neq 0,$$

дати вектори су линеарно независни.

Према томе, вектори a, b и c чине базу векторског простора V.

б) Из једнакости

$$\begin{aligned} d = (1,-1,1) &= x_1 a + x_2 b + x_3 c \\ &= (x_1, 2x_1, 3x_1) + (x_2, x_2, -2x_2) + (0, 2x_3, -6x_3) \\ &= (x_1 + x_2, 2x_1 + x_2 + 2x_3, 3x_1 - 2x_2 - 6x_3) \end{aligned}$$

имамо систем

$$x_1 + x_2 = 1, \quad 2x_1 + x_2 + 2x_3 = -1, \quad 3x_1 - 2x_2 - 6x_3 = 1.$$

Решавањем овог система (на пример, Крамеровим правилом - матрица система је матрица хомогеног система из **а)**) добијамо $x_1 = -\frac{3}{8}$, $x_2 = \frac{11}{8}$ и $x_3 = -\frac{13}{16}$.

Према томе, $d = -\frac{3}{8}a + \frac{11}{8}b - \frac{13}{16}c$.

Увид у радове

Увид у радове биће у каб.317 (ако још увек буде постојао) у следећим терминима:

За студенте са више од 9 поена - 9.12.2014 у 12:20

За студенте са мање од 10 поена - 11.12.2014 у 12:20

Пре доласка на увид треба детаљно проучити приложена решења задатака и припремити евентуална питања.

Проф Драган Ђорић