МАТЕМАТИКА 1

1. Колоквијум, новембар 2014 - Група 8

Драган Ђорић

1. Нека је $\mathcal{M} = \{(x,y) \,:\, x,y \in \mathbb{R},\ x^2 - 9y^2 \neq 0\}$ и нека је операција $*$ дефинисана са

$$(x,y) * (a,b) = (xa + 9yb, xb + ya)$$

за све $(x,y),(a,b) \in \mathcal{M}$. Испитати да ли је $(\mathcal{M},*)$ група. Да ли је дата операција комутативна?

Решење. Докажимо да је $(\mathcal{M},*)$ Абелова група.

1. *Операција $*$ је затворена у скупу $\mathcal{M}$.* Ако је $(x,y)*(a,b) = (u,v)$, тада из $a,b,x,y \in \mathbb{R}$ следи да је $u = xa + 9yb \in \mathbb{R}$ и $v = xb + ya \in \mathbb{R}$.

   Треба још проверити да ли је $u^2 - 9v^2 \neq 0$ за $(x,y) \in \mathcal{M}$ и $(a,b) \in \mathcal{M}$. Како је

$$\begin{aligned} u^2 - 9v^2 &= (xa + 9yb)^2 - 9(xb + ya)^2 \\ &= x^2a^2 + 18xayb + 9^2y^2b^2 - 9x^2b^2 - 18xbya - 9y^2a^2 \\ &= x^2(a^2 - 9b^2) + 9y^2(9b^2 - a^2) \\ &= (a^2 - 9b^2)(x^2 - 9y^2) \end{aligned}$$

   и како је $a^2 - 9b^2 \neq 0$ и $x^2 - 9y^2 \neq 0$, то је и $u^2 - 9v^2 \neq 0$.

   Према томе, $(u,v) \in \mathcal{M}$.

2. *Операција је у скупу $\mathcal{M}$ комутативна* јер је

$$(a,b)*(x,y) = (ax + 9by, ay + bx) = (u,v).$$

3. *Операција $*$ је асоцијативна.* За $(x,y),(a,b),(c,d) \in \mathcal{M}$ је

$$[(x,y)*(a,b)]*(c,d) = (u,v)*(c,d) = (p,q),$$

   где је

$$p = uc + 9vd = (ax + 9yb)c + 9(xb + ya)d = axc + 9ybc + 9xbd + 9yad,$$
$$q = ud + vc = (ax + 9yb)d + (xb + ya)c = axd + 9ybd + xbc + yac.$$

   С друге стране, имамо да је

$$(x,y)*[(a,b)*(c,d)] = (x,y)*(s,t) = (g,h),$$

   где је

$$g = xs + 9yt = x(ac + 9bd) + 9y(ad + bc) = xac + 9bdx + 9yad + 9ybc,$$
$$h = xt + ys = x(ad + bc) + y(ac + 9bd) = xad + xbc + yac + 9ybd.$$

   Како је $p = g$ и $q = h$, операција $*$ је асоцијативна.

4. *Јединични елемент је* $(1,0)$ јер је $1,0 \in \mathbb{R}$, $1^2 \neq 9 \cdot 0^2$ и важи

$$(x,y)*(1,0) = (1,0) = (x,y)$$

   за сваки елемент $(x,y) \in \mathcal{M}$.

5. *Сваки елемент (x,y) скупа $\mathcal{M}$ има свој инверзни елемент.* Из једнакости $(x,y)*(a,b)=(1,0)$ следи да је $ax+9yb=1$ и $xb+ya=0$. Детерминанта овог система (по a и b) је

$$\begin{vmatrix} x & 9y \\ y & x \end{vmatrix} = x^2-9y^2 \neq 0,$$

па систем има јединствено решење

$$a=\frac{x}{x^2-9y^2}, \quad b=-\frac{y}{x^2-9y^2}.$$

Како је $a,b\in\mathbb{R}$ и $a^2-9b^2=\dfrac{1}{x^2-9y^2}\neq 0$, то је $(a,b)\in\mathcal{M}$. Наравно, због комутативности важи и $(a,b)*(x,y)=(1,0)$. Према томе, елемент (a,b) је инверзни за елемент (x,y).

На основу (1)-(5) следи да је структура $(\mathcal{M},*)$ Абелова група.

2. Решити матричну једначину $3MX^{-1}=A^T+B$, при чему је

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad M=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Решење: Ако је $A^T+B=C$, дата једначиина гласи $3MX^{-1}=C$. Пошто је $\det(M)=-1$, матрица M је регуларна, па је дата једначина еквивалентна са једначином $3X^{-1}=M^{-1}C$.

Матрица C је такође регуларна ($\det(C)=-3$), што значи да је и матрица $M^{-1}C$ регуларна. Применом својстава инверзне матрице, из последње једначине добијамо да је $X=3C^{-1}M$.

За матрицу C^{-1} одредимо најпре кофакторе C_{ij} матрице C,

$$C_{11}=\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=5, \quad C_{12}=\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=2, \quad C_{13}=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=-4,$$

$$C_{21}=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=-3, \quad C_{22}=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=-3, \quad C_{23}=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=3,$$

$$C_{31}=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=-1, \quad C_{32}=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}=2, \quad C_{33}=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=-1.$$

Транспоновањем матрице кофактора и множењем са $1/|C|$ налазимо да је

$$C^{-1}=-\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 5 & -3 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -4 & 3 & -1 \end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -5 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Према томе,

$$X=3C^{-1}M=\begin{bmatrix} -5 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -7 & -7 & -4 \\ -7 & -10 & -7 \\ 8 & 11 & 8 \end{bmatrix}.$$

3. У зависности од вредности реалних параметара a и b дискутовати и решити систем

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 3x & - & 2y & + & 5z & + & aw & = & 1 \\ 9x & - & 6y & + & 3z & + & 2w & = & a+b \\ 6x & - & ay & + & 4z & + & 3w & = & 4. \end{array}$$

Решење: Нека је A матрица датог система и $\overline{A}$ проширена матрица тог система. Применом еквивалентних трансформација имамо да је

$$\overline{A}=\left[\begin{array}{cccc|c}3&-2&5&a&1\\9&-6&3&2&a+b\\6&-a&4&3&4\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{cccc|c}3&-2&5&a&1\\0&0&-12&2-3a&a+b-3\\0&4-a&-6&3-2a&2\end{array}\right]$$
$$\sim\left[\begin{array}{cccc|c}3&-2&5&a&1\\0&4-a&-6&3-2a&2\\0&0&-12&2-3a&a+b-3\end{array}\right]$$

За $a\neq 4$ је $r(A)=r(\overline{A})=3$, па је систем сагласан и еквивалентан је систему

$$\begin{aligned}3x-2y+5z=&\ 1-au\\(4-a)y-6z=&\ 2-(3-2a)u\\-12z=&\ a+b-3-(2-3a)u,\end{aligned}$$

где је u слободна променљива. Решавањем овог система добијамо

$$\begin{aligned}z=&\ \frac{1}{12}(2u+3-a-b-3au)\\y=&\ \frac{1}{2(a-4)}(b-7+4u+a-au)\\x=&\ \frac{1}{36(a-4)}(88u-8b-72-11a+5a^2+5ab+3a^2u-34au)\\u\in&\ \mathbb{R}.\end{aligned}$$

За $a=4$ је

$$\overline{A}=\left[\begin{array}{cccc|c}3&-2&5&4&1\\0&0&-6&-5&2\\0&0&-12&-10&b+1\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{cccc|c}3&-2&5&4&1\\0&0&6&5&-2\\0&0&0&0&b-3\end{array}\right].$$

Овде постоје два случаја.

– Ако је $b\neq 3$, тада је $r(A)=2$ и $r(\overline{A})=3$, па систем није сагласан.

– Ако је $b=3$, тада је $r(A)=r(\overline{A})=2$, па је систем сагласан и еквивалентан је систему

$$\begin{aligned}-2y+5z=&\ 1-3x-4u\\6z=&\ -2-5u,\end{aligned}$$

где су x и u слободне променљиве. Решавањем овог система добијамо да је

$$y=-\frac{4}{3}+\frac{3}{2}x-\frac{1}{12}u,\quad z=-\frac{1}{3}-\frac{5}{6}u,\quad x\in\mathbb{R},\quad u\in\mathbb{R}.$$

4. У векторском простору $V=(\mathbb{R}^3,\mathbb{R},+,\cdot)$ дати су вектори

$$a=(1,1,-3),\quad b=(1,3,-4),\quad c=(0,2,7),\quad d=(-1,-1,0).$$

а) Доказати да вектори a, b и c чине базу векторског простора V.

б) Изразити вектор d као линеарну комбинацију вектора a, b и c.

Решење: **а)** Пошто је $dim(V)=3$, довољно је доказати да су вектори a, b и c линеарно независни. Из једнакости

$$\alpha a+\beta b+\gamma c=0$$

добијамо хомоген систем

$$\alpha+\beta=0, \quad \alpha+3\beta+2\gamma=0, \quad -3\alpha-4\beta+7\gamma=0$$

који има тривијално решење ако и само ако је детерминанта D матрице система различита од нуле. Како је

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ -3 & -4 & 7 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ -3 & -1 & 7 \end{vmatrix}=16\neq 0,$$

дати вектори су линеарно независни.

Према томе, вектори a, b и c чине базу векторског простора V.

б) Из једнакости

$$\begin{aligned} d=(-1,-1,0) &= x_1a+x_2b+x_3c \\ &= (x_1,x_1,-3x_1)+(x_2,3x_2,-4x_2)+(0,2x_3,7x_3) \\ &= (x_1+x_2, x_1+3x_2+2x_3, -3x_1-4x_2+7x_3) \end{aligned}$$

имамо систем

$$x_1+x_2=-1, \quad x_1+3x_2+2x_3=-1, \quad -3x_1-4x_2+7x_3=0.$$

Решавањем овог система (на пример, Крамеровим правилом - матрица система је матрица хомогеног система из **а)**) добијамо $x_1=-\dfrac{11}{8}$, $x_2=\dfrac{3}{8}$ и $x_3=-\dfrac{3}{8}$.

Према томе, $d=-\dfrac{11}{8}a+\dfrac{3}{8}b-\dfrac{3}{8}c$.

Увид у радове

Увид у радове биће у каб.317 (ако још увек буде постојао) у следећим терминима:

За студенте са више од 9 поена - 9.12.2014 у 12:20

За студенте са мање од 10 поена - 11.12.2014 у 12:20

Пре доласка на увид треба детаљно проучити приложена решења задатака и припремити евентуална питања.

Проф Драган Ђорић