МАТЕМАТИКА 1

1. Колоквијум, новембар 2015 - Група 2

Драган Ђорић

1. Нека је $\mathcal{M} = \left\{ \begin{bmatrix} x & 0 & y \\ 0 & x+y & 0 \\ y & 0 & x \end{bmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}$ и операција $*$ множење матрица. Испитати да ли је операција $*$ затворена у $\mathcal{M}$. Да ли је $(\mathcal{M}, *)$ група? Да ли је $(\mathcal{M}, *)$ Абелова група?

Решење. Ако је $M_{x.y} = \begin{bmatrix} x & 0 & y \\ 0 & x+y & 0 \\ y & 0 & x \end{bmatrix}$, тада је

$$M_{x,y} * M_{a,b} = M_{x,y} \cdot M_{a,b} = \begin{bmatrix} xa+yb & 0 & ay+bx \\ 0 & (x+y)(a+b) & 0 \\ ya+xb & 0 & yb+xa \end{bmatrix} = M.$$

Како је $M(1,1) = M(3,3)$, $M(1,3) = M(3,1)$ и $M(2,2) = M(1,1) + M(1,3)$, то је

$$M_{x,y} * M_{a,b} = M_{u,v}, \quad u = xa + yb,\ v = xb + ya.$$

Из претпоставке $x, y, a, b \in \mathbb{R}$ следи $u, v \in \mathbb{R}$. Према томе, $M_{u,v} \in \mathcal{M}$, односно операција $*$ је затворена у $\mathcal{M}$.

Пошто је $M_{1,0}$ јединична матрица реда три, структура $(\mathcal{M}, *)$ има јединични елемент.

Из $M_{0,0} * M_{x,y} = M_{0,0} \neq M_{1,0}$ следи да елемент $M_{0,0}$ нема инверзни елемент. Према томе, структура $(\mathcal{M}, *)$ НИЈЕ група.

С обзиром на то да $(\mathcal{M}, *)$ није група, последње питање је деплaсирано.

2. У зависности од вредности параметара a и b одредити ранг матрице K, где је

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 11 & b-4 & 1 & 7 \\ 5 & 30 & 3b-10 & 3 & 23 \\ 2 & 1 & a-b-3 & 3 & ab-12 \end{bmatrix}.$$

Решење: Ако је r ранг дате матрице, тада је $r \leq 4$ јер је K матрица типа 4×5 и $r \geq 3$ јер је $M_{1,2,3}^{1,4,5} = 1$ (ознака за наведени минор је као у важећем уџбенику, стр.50).

Елементарним трансформацијама матрице K добијамо да је

$$K \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & b & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & a+1 & ab-5 \end{bmatrix}.$$

За $a = -1$ и $b = -5$ је $r = 3$ јер су сви минори реда 4 једнаки нули.

За $a \neq -1$ је $r = 4$ јер је $M_{1,2,3,4}^{1,2,3,4} \neq 0$.

За $a = -1$ и $b \neq -5$ је $r = 4$ јер је $M_{1,2,3,4}^{1,2,3,5} \neq 0$.

Према томе, $r = 3$ за $(a, b) = (-1, -5)$ и $r = 4$ за $(a, b) \neq (-1, -5)$.

3. Дате су праве

$$p: \frac{x}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+7}{12}, \quad q: \frac{x-5}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-10}{5}$$

и тачка $S(1,-1,0)$.

а) Испитати међусобни положај правих p и q. Уколико се секу одредити њихову пресечну тачку, у супротном одредити растојање између њих.

б) Одредити једначину равни π која садржи тачку S, координатни почетак и паралелна је правој p, а затим одредити ортогоналну пројекцију праве p на раван π.

Решење: **а)** Параметарске једначине правих p и q су

$$p: x = 3t,\ y = 2t,\ z = 12t - 7, \quad q: x = 2s+5,\ y = s+3,\ z = 5s+10.$$

Систем

$$3t = 2s+5, \quad 2t = s+3, \quad 12t - 7 = 5s + 10$$

има јединствено решење $(t,s) = (1,-1)$ које одређује тачку $A(3,2,5)$.

Према томе, праве p и q су компланарне и секу се у тачки A.

б) Ако је n_π вектор нормале равни π, а n_p вектор правца праве p, тада је

$$4n_\pi = n_p \times \overrightarrow{OS} = (3,2,12) \times (1,-2,0) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 2 & 12 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 24i + 12j - 8k,$$

па је $n_\pi = (6,3,-2)$. Према томе, једначина равни π је $6x + 3y - 2z = 0$.

Права r која садржи тачку $P(0,0,-7) \in p$ и која је нормална на раван π има једначину $\frac{x}{6} = \frac{y}{3} = \frac{z+7}{-2}$. Продор праве r кроз раван π је тачка $P'(-12/7, -6/7, -45/7)$. Како пројекција p' праве p садржи тачку P' и има правац n_p, једначина пројекције праве p на раван π је

$$p': \frac{x+12/7}{3} = \frac{y+6/7}{2} = \frac{z+45/7}{12}.$$