МАТЕМАТИКА 1

1. Колоквијум, новембар 2016 - Група 2

Драган Ђорић

1. Нека је $\mathcal{S} = \left\{ \begin{bmatrix} x & y & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R},\ x \neq 0 \right\}$ и операција $*$ множење матрица. Испитати да ли је $(\mathcal{S}, *)$ група. Да ли је $(\mathcal{S}, *)$ Абелова група?

Решење. Ако је $M_{x.y} = \begin{bmatrix} x & y & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix}$, тада је

$$M_{x,y} * M_{a,b} = M_{x,y} \cdot M_{a,b} = \begin{bmatrix} xa & xb + ya & 0 \\ 0 & xa & 0 \\ 0 & 0 & xa \end{bmatrix} = M_{xa, xb+ya}.$$

Како из претпоставке $M_{x,y} \in \mathcal{S}$ и $M_{a,b} \in \mathcal{S}$ следи да је $x, y, a, b \in \mathbb{R}$ и да је $x \neq 0$ и $a \neq 0$, то је $xa, xb + ya \in \mathbb{R}$ и $xa \neq 0$. Према томе, $M_{xa,xb+ya} \in \mathcal{S}$, што значи да је операција $*$ затворена у $\mathcal{S}$.

Операција $*$ је асоцијативна јер је множење матрица асоцијативна операција.

Пошто је $M_{1,0}$ јединична матрица реда три (E_3) и пошто $M_{1,0} \in \mathcal{S}$ $(1, 0 \in \mathbb{R},\ 1 \neq 0)$, структура $(\mathcal{S}, *)$ има јединични елемент.

Из једнакости

$$M_{x,y} * M_{a,b} = M_{a,b} * M_{x,y} = M_{ax,ay+bx}$$

следи да је операција $*$ (множење матрица) комутативна у скупу $\mathcal{S}$ (мада комутативност множења не важи у општем случају).

За $M_{x,y} \in \mathcal{S}$ важи

$$M_{x,y} * M_{1/x,-y/x^2} = M_{1/x,-y/x^2} = M_{1,0} = E_3.$$

Како $M_{1/x,-y/x^2} \in \mathcal{S}$ за $x \neq 0$ $(1/x, -y/x^2 \in \mathbb{R}$ и $1/x \neq 0)$, то је $M_{x,y}^{-1} = M_{1/x,-y/x^2}$, што значи да сваки елемент из скупа $\mathcal{S}$ има инверзни елемент који припада $\mathcal{S}$.

Из свега наведеног следи да је структура $(\mathcal{S}, *)$ Абелова група.

2. У векторском простору $V = (\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, \cdot)$ дати су вектори $a = (2, 3, p)$, $b = (-1, -2, 4)$ и $c = (1, -3, 1)$, где је $p \in \mathbb{R}$.
а) За $p = 3$ испитати да ли дати вектори чине базу векторског простора V. Уколико чине, одредити координате вектора $(11, 1, -13)$ у тој бази, у супротном представити вектор a као линеарну комбинацију преостала два вектора.
б) Одредити све вредности реалног параметра p за које вектори a, b и c чине базу датог векторског простора.

Решење: **б)** Пошто је димензија простора V једнака три[1], дати вектори чине базу тог простора ако су линеарно независни. Вектори a, b и c су линеарно независни ако из једнакости $\alpha a + \beta b + \gamma c = (0, 0, 0)$, где су α, β и γ реални бројеви, следи да је $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Претпоставимо, дакле, да је

$$\alpha(2, 3, p) + \beta(-1, -2, 4) + \gamma(1, -3, 1) = (0, 0, 0).$$

[1] Видети уџбеник Д. Ђорић, Р. Лазовић, МАТЕМАТИКА 1, ФОН, 2014, страна 64

Из ове једнакости добијамо хомоген систем

$$\begin{aligned}2\alpha - \beta + \gamma &= 0\\ 3\alpha - 2\beta - 3\gamma &= 0\\ p\alpha + 4\beta + \gamma &= 0.\end{aligned}$$

који има тривијално решење ако и само ако је матрица система регуларна. Како је

$$\begin{vmatrix}2 & -1 & 1\\ 3 & -3 & -3\\ p & 4 & 1\end{vmatrix} = 5p + 35 = 5(p+7),$$

за $p \neq -7$ је $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Према томе, дати вектори чине базу простора V за свако $p \neq -7$.

а) Пошто је $3 \neq -7$, дати вектори за $p = 3$ чине базу простора V.

Координате (x, y, z) вектора $(11, 1, -13)$ у овој бази одређујемо из једнакости

$$(11, 1, -13) = x(2, 3, 3) + y(-1, -2, 4) + z(1, -3, 1)$$

из које добијамо систем

$$\begin{aligned}2x - y + z &= 11\\ 3x - 2y - 3z &= 1\\ 3x + 4y + z &= -13.\end{aligned}$$

Решавањем овог система (на пример, Крамеровим правилом имамо да је $D = D_x = 50$, $D_y = -250$ и $D_z = 200$) налазимо да је $(x, y, z) = (1, -5, 4)$.

3. Дате су права $p:\ x = t+2,\ y = -2t+1,\ z = -t+3$, где је $t \in \mathbb{R}$, раван $\alpha:\ 2x-y-2z-3 = 0$ и тачка $A(2, 2, 0)$.

а) Испитати међусобни положај праве p и равни α. Уколико су паралелне одредити растојање између њих, у супротном одредити њихов пресек.

б) Одредити једначину праве која садржи тачку A, паралелна је са α и сече праву p.

Решење: **а)** Заменом координата тачака праве p у једначини равни α добијамо

$$2(t+2) - (-2t+1) - 2(-t+3) - 3 = 0,$$

односно $6t - 6 = 0$. То значи да постоји само једна тачка (за $t = 1$) која је заједничка и за праву p и за раван α. Према томе, права p и раван α нису паралелне, а њихов пресек је тачка $M(3, -1, 2)$.

б) Једначина равни β која садржи тачку A и која је паралелна равни α је

$$2(x-2) - (y-2) - 2z = 0,$$

односно $2x - y - 2z - 2 = 0$. Продор праве p кроз раван β је тачка $B(17/6, -2/3, 13/6)$ (добија се на исти начин као продор праве p кроз раван α, за $t = 5/6$). Тражена права q је одређена тачкама A и B. Како је $\overrightarrow{AB} = (5/6, -8/3, 13/6)$, вектор правца тражене праве је, на пример, $n_q = (5, -16, 13)$. Према томе, тражена права је

$$q:\ \frac{x-2}{5} = \frac{y-2}{-16} = \frac{z}{13}.$$