МАТЕМАТИКА 1

1. Колоквијум, новембар 2016 - Група 4

Драган Ђорић

1. Нека је $\mathcal{P} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R},\ a \neq 0 \right\}$ и операција $*$ множење матрица. Испитати да ли је $(\mathcal{P}, *)$ група. Да ли је $(\mathcal{P}, *)$ Абелова група?

Решење. Ако је $M_{x.y} = \begin{bmatrix} x & y & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix}$, тада је

$$M_{x,y} * M_{a,b} = M_{x,y} \cdot M_{a,b} = \begin{bmatrix} xa & xb + ya & 0 \\ 0 & xa & 0 \\ 0 & 0 & xa \end{bmatrix} = M_{xa, xb+ya}.$$

Како из претпоставке $M_{x,y} \in \mathcal{P}$ и $M_{a,b} \in \mathcal{P}$ следи да је $x, y, a, b \in \mathbb{R}$ и да је $x \neq 0$ и $a \neq 0$, то је $xa, xb + ya \in \mathbb{R}$ и $xa \neq 0$. Према томе, $M_{xa,xb+ya} \in \mathcal{P}$, што значи да је операција $*$ затворена у $\mathcal{P}$.

Операција $*$ је асоцијативна јер је множење матрица асоцијативна операција.

Пошто је $M_{1,0}$ јединична матрица реда три (E_3) и пошто $M_{1,0} \in \mathcal{P}$ $(1, 0 \in \mathbb{R},\ 1 \neq 0)$, структура $(\mathcal{P}, *)$ има јединични елемент.

За $M_{x,y} \in \mathcal{P}$ важи

$$M_{x,y} * M_{1/x, -y/x^2} = M_{1/x, -y/x^2} = M_{1,0} = E_3.$$

Како $M_{1/x,-y/x^2} \in \mathcal{P}$ за $x \neq 0$ $(1/x, -y/x^2 \in \mathbb{R}$ и $1/x \neq 0)$, то је $M_{x,y}^{-1} = M_{1/x,-y/x^2}$, што значи да сваки елемент из скупа $\mathcal{P}$ има инверзни елемент који припада $\mathcal{P}$.

Из свега наведеног следи да је структура $(\mathcal{P}, *)$ група.

Да ли је $(\mathcal{P}, *)$ и Абелова група? Из једнакости

$$M_{x,y} * M_{a,b} = M_{a,b} * M_{x,y} = M_{ax, ay+bx}$$

следи да је операција $*$ (множење матрица) комутативна у скупу $\mathcal{S}$ (мада комутативност множења не важи у општем случају).

Према томе, структура $(\mathcal{P}, *)$ је Абелова група.

2. У векторском простору $V = (\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, \cdot)$ дати су вектори $e_1 = (1, \lambda, 2)$, $e_2 = (-1, 5, 4)$ и $e_3 = (1, -3, 0)$, где је $\lambda \in \mathbb{R}$.

а) За $\lambda = 2$ испитати да ли дати вектори чине базу векторског простора V. Уколико чине, одредити координате вектора $(16, -46, -10)$ у тој бази, у супротном представити вектор e_1 као линеарну комбинацију преостала два вектора.

б) Одредити све вредности реалног параметра λ за које вектори e_1, e_2 и e_3 чине базу датог векторског простора.

Решење. **б)** Пошто је димензија простора V једнака три[1], дати вектори чине базу тог простора ако су линеарно независни. Вектори e_1, e_2 и e_3 су линеарно независни ако из једнакости $\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 = (0, 0, 0)$, где су α, β и γ реални бројеви, следи да је $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Претпоставимо, дакле, да је

$$\alpha(1, \lambda, 3) + \beta(-1, 5, 4) + \gamma(1, -3, 0) = (0, 0, 0).$$

[1] Видети уџбеник Д. Ђорић, Р. Лазовић, МАТЕМАТИКА 1, ФОН, 2014, страна 64

Из ове једнакости добијамо хомоген систем

$$\alpha-\beta+\gamma=0, \quad \lambda\alpha+5\beta-3\gamma=0, \quad 3\alpha+4\beta=0$$

који има тривијално решење ако и само ако је матрица система регуларна. Како је

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ \lambda & 5 & -3 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 4\lambda+6 = 2(2\lambda+3),$$

за $\lambda \neq -3/2$ је $\alpha=\beta=\gamma=0$.

Према томе, дати вектори чине базу простора V за свако $\lambda \neq -3/2$.

а) Пошто је $2 \neq -3/2$, дати вектори за $\lambda = 2$ чине базу простора V.

Координате (x, y, z) вектора $(16, -46, -10)$ у овој бази одређујемо из једнакости

$$(16, -46, -10) = x(1, 2, 3) + y(-1, 5, 4) + z(1, -3, 0)$$

из које добијамо систем

$$\alpha-\beta+\gamma=16, \quad \lambda\alpha+5\beta-3\gamma=-46, \quad 3\alpha+4\beta=-10.$$

Решавањем овог система (на пример, Крамеровим правилом имамо да је $D = 14$, $D_x = 28$, $D_y = -56$ и $D_z = 140$) налазимо да је $(x, y, z) = (2, -4, 10)$.

3. Дате су права $a:\ x = t+2,\ y = -2t+1,\ z = -t+3$, где је $t \in \mathbb{R}$, раван $\pi:\ 2x-y-2z-3=0$ и тачка $A(2, 2, 0)$.

а) Испитати међусобни положај праве a и равни π. Уколико су паралелне одредити растојање између њих, у супротном одредити њихов пресек.

б) Одредити једначину праве која садржи тачку A, паралелна је са π и сече праву a.

Решење. **а)** Заменом координата тачака праве a у једначини равни π добијамо

$$2(t+2) - (-2t+1) - 2(-t+3) - 3 = 0,$$

односно $6t - 6 = 0$. То значи да постоји само једна тачка (за $t = 1$) која је заједничка и за праву a и за раван π. Према томе, права a и раван π нису паралелне, а њихов пресек је тачка $M(3, -1, 2)$.

б) Једначина равни β која садржи тачку A и која је паралелна равни π је

$$2(x-2) - (y-2) - 2z = 0,$$

односно $2x - y - 2z - 2 = 0$. Продор праве a кроз раван β је тачка $B(17/6, -2/3, 13/6)$ (добија се на исти начин као продор праве a кроз раван π, за $t = 5/6$). Тражена права b је одређена тачкама A и B. Како је $\overrightarrow{AB} = (5/6, -8/3, 13/6)$, вектор правца тражене праве је, на пример, $n_b = (5, -16, 13)$. Према томе, тражена права је

$$b:\ \frac{x-2}{5} = \frac{y-2}{-16} = \frac{z}{13}.$$

Напомена. Заједничку тачку B правих a и b можемо да одредимо и без равни β. Пошто $B(t+2, -2t+1, -t+3) \in a$, из услова $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{n}_\pi$, односно $(t, -2t-1, -t+3)\cdot(2, -1, -2) = 0$, добијамо $t = 5/6$.

Вектор правца $\overrightarrow{n}_b = (k, l, m)$ праве b можемо да добијемо и из услова $2k - l - 2m = 0$ ($\overrightarrow{n}_\pi \perp \overrightarrow{n}_b$) и $7k + 3l + m = 0$ ($[\overrightarrow{n}_a, \overrightarrow{n}_b, \overrightarrow{AP}] = 0$, где је $P(2, 1, 3)$ тачка праве a). На пример, за $m = 13$ имамо да је $k = 5$ и $l = -16$, па је $\overrightarrow{n}_b = (5, -16, 13)$.