МАТЕМАТИКА 1

1. Колоквијум, новембар 2017 - Група 7

Драган Ђорић

1. Нека је $\mathcal{D} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & x \\ 0 & -x \end{bmatrix} \mid x, y \in \mathbb{Q},\ x \neq 0 \right\}$ и операција $*$ множење матрица. Испитати да ли је $(\mathcal{D}, *)$ група. Да ли је $(\mathcal{D}, *)$ Абелова група?

Решење. Нека је $M_x = \begin{bmatrix} 0 & x \\ 0 & -x \end{bmatrix}$ и нека је $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$. Тада је

$$M_x * M_y = M_x \cdot M_y = \begin{bmatrix} 0 & -xy \\ 0 & xy \end{bmatrix} = M_{-xy}.$$

Како је $-xy \in \mathbb{Q}^*$ за $x, y \in \mathbb{Q}^*$, операција $*$ је затворена у скупу $\mathcal{D}$.

Операција $*$ је асоцијативна јер је множење матрица асоцијативна операција. Из $M_y \cdot M_x = M_{-yx}$ и комутативности множења рационалних бројева следи да је операција $*$ комутативна у скупу $\mathcal{D}$ (мада комутативност множења матрица не важи у општем случају). Према томе, ако је $(\mathcal{D}, *)$ група, онда је и Абелова група.

Јединична матрица E_2 не припада скупу $\mathcal{D}$, али једнакост $M_x \cdot M_y = M_x$ важи за $y = -1$. Како је $-1 \in \mathbb{Q}^*$ и како у $\mathcal{D}$ важи комутативност за операцију $*$, то је M_{-1} неутрални елемент у $(\mathcal{D}, *)$. За $x \in \mathbb{Q}^*$ је $1/x \in \mathbb{Q}^*$ и важи $M_x \cdot M_{1/x} = M_{1/x} \cdot M_x = M_{-1}$, што значи да сваки елемент M_x из $\mathcal{D}$ има инверзни елемент $M_{1/x}$ који такође припада $\mathcal{D}$.

Из свега наведеног следи да је структура $(\mathcal{D}, *)$ Абелова група.

2. У векторском простору $V = (\mathbb{R}^4, \mathbb{R}, +, \cdot)$ дати су вектори $v_1 = (1, 0, a, -1)$, $v_2 = (0, -1, b, -1)$, $v_3 = (-1, -1, c, 1)$ и $v_4 = (-1, 1, d, 0)$, где је $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

а) Коју једнакост треба да задовољавају реални параметри a, b, c и d да би вектори v_1, v_2, v_3 и v_4 били линеарно зависни у датом векторском простору?

б) Испитати да ли за $a = c = 1$, $b = 2$ и $d = -3$ вектори чине базу датог векторског простора.

Решење. **а)** Лако се види да су вектори v_1, v_2 и v_3 линеарно независни јер из једнакости $xv_1 + yv_2 + zv_3 = 0$ следи да је $z = x = -y$ и $-x - y + z = 0$, односно $x = y = z = 0$. Ако су дати вектори зависни, тада је v_4 линеарна кмбинација вектора v_1, v_2 и v_3.

Из једнакости $v_4 = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3$ добијамо систем

$$-1 = \alpha - \gamma, \quad 1 = -\beta - \gamma, \quad d = \alpha a + \beta b + \gamma c, \quad 0 = -\alpha - \beta + \gamma$$

из којег следи да је $\alpha = -3$, $\beta = 1$ и $\gamma = -2$. Да би овај систем био сагласан мора да важи и једнакост $d = -3a + b - 2c$.

Према томе, тражена једнакост је $3a - b + 2c + d = 0$.

б) Пошто је димензија простора V једнака четири[1], дати вектори чине базу тог простора ако су линеарно независни. Међутим, за дате вредности параметара важи једнакост из а), па дати вектори нису линеарно независни.

Према томе, дати вектори не чине базу простора V.

3. Дате су права $p : \dfrac{x-5}{2} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z}{1}$ и права $q : \begin{cases} x - y + 2z + 4 &= 0 \\ 2x + 3y - z - 2 &= 0 \end{cases}$.

а) Доказати да су дате праве мимоилазне и одредити растојање између њих.

б) Одредити једначину равни π која садржи праву p и која је паралелна правој q, а затим одредити ортогоналну пројекцију праве q на раван π.

[1] Видети уџбеник Д. Ђорић, Р. Лазовић, МАТЕМАТИКА 1, ФОН, 2014, страна 64

Решење: Како је $(1,-1,2)\times(2,3,-1)=(-5,5,5)$, за вектор правца праве q можемо узети $v_q=(1,-1,-1)$.

а) Праве p и q нису паралелне јер њихови вектори правца нису колинеарни. То значи да постоји само једна раван π (из тачке б)), а њен вектор правца је $n_\pi=v_p\times v_q=(2,3,-1)$. Тачка $P(5,2,0)\in p$ припада равни π, па је њена једначина $2(x-5)+3(y-2)-z=0$, односно $2x+3y-z-16=0$. Како тачка $Q(0,0,-2)\in q$ не припада равни π, праве p и q су мимоилазне, при чему је

$$d(p,q)=d(Q,\pi)=\frac{|2\cdot 0+3\cdot 0-1\cdot(-2)-16|}{|n_\pi|}=\frac{14}{\sqrt{14}}=\sqrt{14}.$$

б) Једначина равни π је већ одређена у а) и она гласи $2x+3y-z-16=0$.

Пошто је вектор правца пројекције q' праве q на раван π исти као и за праву q, довољно је одредити пројекцију Q' тачке Q на раван π. Тачка Q' је продор праве $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z+2}{-1}$ (нормала кроз Q на раван π) кроз раван π. Заменом $x=2t$, $y=3t$ и $z=-t-2$ у једначини равни π добијамо да је $t=1$, а продорна тачка је $Q'(2,3,-3)$. Према томе, тражена пројекција је права $q' : \frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+3}{-1}$.