МАТЕМАТИКА 1

1. Колоквијум, новембар 2018 - Група 1 - Први задатак

Драган Ђорић

Нека је $\mathcal{M} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & e \\ c & d & f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mid a,b,c,d,e,f \in \mathbb{R},\ ad - bc = 1 \right\}$ и нека је операција $*$ множење матрица. Испитати да ли је $(\mathcal{M}, *)$ група. Да ли је $(\mathcal{M}, *)$ Абелова група?

Решење. Уочимо најпре да за $M \in \mathcal{M}$ важи $|M| = 1$. Ако је $M_1, M_2 \in \mathcal{M}$ и ако је

$$M_1 = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & e_1 \\ c_1 & d_1 & f_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad M_2 = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 & e_2 \\ c_2 & d_2 & f_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

тада је

$$M_1 * M_2 = M_1 \cdot M_2 = M_3 = \begin{bmatrix} a_3 & b_3 & e_3 \\ c_3 & d_3 & f_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

где је

$$a_3 = a_1a_2 + b_1c_2, \quad b_3 = a_1b_2 + b_1d_2, \quad e_3 = a_1e_2 + b_1f_2 + e_1,$$

$$c_3 = a_2c_1 + c_2d_1, \quad d_3 = b_2c_1 + d_1d_2, \quad f_3 = c_1e_2 + d_1f_2 + f_1.$$

Да ли $M_3 \in \mathcal{M}$? Сви елементи матрице M_3 су реални бројеви, а из једнакости[1], $|M_3| = |M_1| \cdot |M_2| = 1$ следи да је $a_3d_3 - b_3c_3 = 1$. Према томе, $M_3 \in \mathcal{M}$, што значи да је операција $*$ затворена у скупу $\mathcal{M}$.

Операција $*$ је асоцијативна јер је множење матрица асоцијативна операција.

Пошто јединична матрица E (реда три) припада скупу $\mathcal{M}$, структура $(\mathcal{M}, *)$ има јединични елемент.

Како је матрица $M \in \mathcal{M}$ регуларна, она има јединствену инверзну матрицу M^{-1} за коју важи $M \cdot M^{-1} = M^{-1} \cdot M = E$. Да ли $M^{-1} \in \mathcal{M}$? Ако је M матрица којом је дефинисан скуп $\mathcal{M}$ (у задатку), њени кофактори су ('читамо' их директно из матрице):

$$A_{11} = d,\ A_{12} = -c,\ A_{13} = 0,\ A_{21} = -b,\ A_{22} = a,\ A_{23} = 0,\ A_{31} = bf - de,\ A_{32} = -af + ce,\ A_{33} = 1,$$

па је

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} d & -b & bf - de \\ -c & a & ce - af \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Као што видимо, матрица M^{-1} има исту структуру као матрица M, при чему су испуњени услови из дефиниције скупа $\mathcal{M}$ (сви елементи матрице M^{-1} су реални бројеви и важи једнакост $da - (-b)(-c) = 1$). То значи да сваки елемент из скупа $\mathcal{M}$ има инверзни елемент који такође припада том скупу.

Из свега наведеног следи да структура $(\mathcal{M}, *)$ јесте група.

Матрице M_1 и M_2 за које је $b_1 = 0$ и $c_1 = b_2 = 1$ нису комутативне, што значи да структура $(\mathcal{M}, *)$ није Абелова група.

[1] Видети уџбеник Д. Ђорић, Р. Лазовић, МАТЕМАТИКА 1, ФОН, 2018, страна 43, Теорема 3.16