МАТЕМАТИКА 1

1. Колоквијум, новембар 2018 - Група 5

Драган Ђорић

1. Нека је $\mathcal{N} = \left\{ \begin{bmatrix} 1-a & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 1-a \end{bmatrix} \mid a \in \mathbb{R},\ a \neq 1/2 \right\}$ и нека је операција $*$ множење матрица. Испитати да ли је $(\mathcal{N}, *)$ група. Да ли је $(\mathcal{N}, *)$ Абелова група?

Решење. Ако је $M_a = \begin{bmatrix} 1-a & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 1-a \end{bmatrix}$, тада је

$$M_a * M_b = M_a \cdot M_b = \begin{bmatrix} 1-a-b+2ab & 0 & a+b-2ab \\ 0 & 0 & 0 \\ a+b-2ab & 0 & 1-a-b+2ab \end{bmatrix} = M_{a+b-2ab}.$$

Како из претпоставке $M_a \in \mathcal{N}$ и $M_b \in \mathcal{N}$ следи да је $a, b \in \mathbb{R}$ и да је $(1-2a)(1-2b) \neq 0$, то је $a+b-2ab \in \mathbb{R}$ и $a+b-2ab \neq 1/2$. Према томе, $M_{a+b-2ab} \in \mathcal{N}$, што значи да је операција $*$ затворена у $\mathcal{N}$.

Операција $*$ је асоцијативна јер је множење матрица асоцијативна операција.

Како је $M_0 \cdot M_a = M_a \cdot M_0 = M_a$ и како $M_0 \in \mathcal{N}$, структура $(\mathcal{S}, *)$ има јединични елемент.

За $M_a \in \mathcal{N}$ важи

$$M_a * M_{a/(2a-1)} = M_{a/(2a-1)} * M_a = M_0.$$

Како $M_{a/(2a-1)} \in \mathcal{N}$ за $a \neq 1/2$ $(a/(2a-1) \in \mathbb{R}$ и $a/(2a-1) \neq 1/2)$, то је $M_a^{-1} = M_{a/(2a-1)}$, што значи да сваки елемент из скупа $\mathcal{N}$ има инверзни елемент који припада $\mathcal{N}$.

Из свега наведеног следи да је структура $(\mathcal{S}, *)$ група. Пошто је и $M_b * M_a = M_{a+b-2ab}$, ова група је и Абелова.

2. Дати су вектори $a = (1, 0, m+2)$, $b = (m, 3, -1)$, $c = (2, -2, 2)$ и $d = (-2, 0, 4)$.

а) Одредити вредност реалног параметра m тако да вектори a, b и c буду линеарно зависни.

б) Доказати да за $m = -3$ вектори a, b и c чине базу векторског простора $\mathbb{R}^3$ и изразити вектор d као линеарну комбинацију та три вектора.

Решење:

а) Вектори a, b и c су линеарно зависни ако једнакост $\alpha a + \beta b + \gamma c = (0, 0, 0)$ важи за неко $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0, 0, 0)$. Из једнакости

$$\alpha(1, 0, m+2) + \beta(m, 3, -1) + \gamma(2, -2, 2) = (0, 0, 0)$$

добијамо хомоген систем

$$\begin{aligned} \alpha + m\beta + 2\gamma &= 0 \\ 3\beta - 2\gamma &= 0 \\ (m+2)\alpha - \beta + 2\gamma &= 0. \end{aligned}$$

који има нетривијално решење ако и само ако је матрица система сингуларна. Како је

$$\begin{vmatrix} 1 & m & 2 \\ 0 & 3 & -2 \\ m+2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -2m^2 - 10m - 8 = -2(m+4)(m+1),$$

вектори a, b и c су линеарно зависни ако је $m = -4$ или ако је $m = -1$.

б) Пошто је димензија простора $\mathbb{R}^3$ једнака три[1], дати вектори чине базу тог простора ако су линеарно независни. Како из а) имамо да су за $m = -3$ вектори a, b и c линеарно независни, они чине базу простора $\mathbb{R}^3$.

Координате (x, y, z) вектора d у овој бази одређујемо из једнакости

$$(-2, 0, 4) = x(1, 0, -1) + y(-3, 3, -1) + z(2, -2, 2)$$

из које добијамо систем

$$\begin{aligned} x - 3y + 2z &= -2 \\ 3y - 2z &= 0 \\ x - y + 2z &= 4. \end{aligned}$$

Решавањем овог система (на пример, Крамеровим правилом) налазимо да је $(x, y, z) = (-2, 1, 3/2)$. Према томе, $d = -2a + b + \frac{3}{2}c$.

3. Дате су права $p: \dfrac{x-3}{-2} = \dfrac{y+2}{4} = \dfrac{z-2}{-5}$ и раван $\alpha: x + y + 4z - 9 = 0$.

а) Испитати међусобни положај праве p и равни α. Уколико су паралелне одредити растојање између α и p, у супротном одредити угао између њих.

б) Одредити ортогоналну пројекцију праве p на раван α.

Решење: **а)** Приметимо најпре да тачка $P(3, -2, 2)$ припада и прави p и равни α, док тачка $Q(1, 2, -3)$ припада прави p а не припада равни α. Према томе, права p и раван α нису паралелне, а њихов пресек је тачка $P(3, -2, 2)$. Како је

$$\sin\angle(p, \alpha) = \frac{|n_p \cdot n_\alpha|}{|n_p| \cdot |n_\alpha|} = \frac{|(-2, 4, -5) \cdot (1, 1, 4)|}{\sqrt{1 + 1 + 16} \cdot \sqrt{4 + 16 + 25}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}},$$

то је $\angle(p, \alpha) = \arcsin\sqrt{2/5}$.

б) Пројекција тачке Q на раван α је продор праве $q: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z+3}{4}$ кроз раван α. Заменом $x = t + 1$, $y = t + 2$ и $z = 4t - 3$ у једначину равни α добијамо да је $t = 1$, што значи да је $Q'(2, 3, 1)$ пројекција тачке Q.

Пројекција праве p на раван α је права p' одређена тачкама P и Q'. Како је $\overrightarrow{PQ'} = (-1, 5, -1)$, тражена пројекција је

$$p': \ \frac{x-3}{-1} = \frac{y+2}{5} = \frac{z-2}{-1}.$$

Напомена. Угао из тачке а) можемо да одредимо и помоћу пројекције p' јер је

$$\cos\angle(p, \alpha) = \cos\angle(p, p') = \frac{n_p \cdot n_{p'}}{|n_p| \cdot |n_{p'}|} = \sqrt{\frac{3}{5}}.$$

[1] Видети уџбеник Д. Ђорић, Р. Лазовић, МАТЕМАТИКА 1, ФОН, 2018, страна 64