МАТЕМАТИКА 1

1. Колоквијум, новембар 2008 - Група Д

Драган Ђорић

1. Нека је $A = (3, +\infty)$ и нека је $*$ операција на R дефинисана са

$$x * y = 3xy - 9x - 9y + 30.$$

Ипитати да ли је $(A, *)$ Абелова група.

Решење:

1. *Операција $*$ је затворена у скупу A (операција и ускупу A).* За $x, y \in A$ је

$$x * y = 3(x-3)(y-3) + 3 > 3$$

(јер је $x < 3$ и $y > 3$), што назчи да $x*y \in A$, односно да је $(A, *)$ алгебарска структура (групоид).

2. *Операција $*$ је комутативна.* Из комутативности множења и сабирања реалних бројева следи да је $x * y = y * x$ (комутативни групоид).

3. *Операција $*$ је асоцијативна.* Из

$$\begin{aligned} (x * y) * z &= (3xy - 9x - 9y + 30) * z \\ &= 3(3xy - 9x - 9y + 30)z - 9(3xy - 9x - 9y + 30) - 9z + 30 \\ &= 9xyz - 27xz - 27yz - 27xy + 81x + 81y + 81z - 240. \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} x * (y * z) &= x * (3yz - 9y - 9z + 30) * z \\ &= 3x(3yz - 9y - 9z + 30) - 9x - 9(3yz - 9y - 9z + 30) \\ &= 9xyz - 27xz - 27yz - 27xy + 81x + 81y + 81z - 240. \end{aligned}$$

следи $(x * y) * z = x * (y * z)$.

4. *У скупу A постоји неутрални елемент.* Из $x * e = x$, односно

$$3xe - 9x - 9e + 30 = x$$

следи да је $e = \dfrac{10}{3}$ (јер је $x - 3 \neq 0$). Како $e \in A$ и како важи комутативност, то је e неутрални елемент у A.

5. *За $x \in A$ постоји инверзни елемент у A.* Из $x * x' = e$, односно

$$3xx' - 9x - 9x' + 30 = \frac{10}{3}$$

следи да је

$$x' = \frac{1}{9} \cdot \frac{27x - 80}{x - 3}.$$

Како је

$$x' > \frac{1}{9} \cdot \frac{27x - 81}{x - 3} = 3,$$

то значи да $x' \in A$.

На основу (1)-(5) следи да је $(A,*)$ Абелова група.

2. Решити матричну једначину

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot X + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \end{bmatrix}.$$

Решење: Једначина може да се запише у облику $AX = B$, где је

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \end{bmatrix}.$$

Како је A регуларна матрица, то је

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 5 & -10 & 10 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. У зависности од реалног параметра δ решити систем

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & + & z & + & w & = & 2 \\ 3x & + & y & + & 2z & + & w & = & 7 \\ -x & + & y & & & + & w & = & \delta \end{array}$$

Решење: Систем је еквивалентан систему

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & + & z & + & w & = & 2 \\ & & -2y & - & z & - & 2w & = & 1 \\ & & & & & & 0 & = & 3+\delta \end{array}$$

1. За $\delta \neq -3$ систем није сагласн.
2. За $\delta = -3$ систем има двопараметарски скуп решења

$$\mathcal{R}_{s,t} = \left\{ \left(\frac{5-s}{2}, -\frac{s+2t+1}{2}, s, t \right) \ ; \ s,t \in R \right\}.$$

4. Дати су вектори

$$a = (m-3, 3, -1), \quad b = (1, -1, 3), \quad c = (1, m+4, -1), \quad m \in R.$$

1. Одредити вредности параметра m за које су a, b и c линеарно зависни.
2. За вредност m из 1., која је цео број, изразити вектор c помоћу вектора a и b.

Решење:

1. Из једнакости $\alpha a + \beta b + \gamma c = 0$ добијамо хомоген систем

$$\begin{array}{rcrcrcr} (m-3)\alpha & + & \beta & + & \gamma & = & 0 \\ 3\alpha & - & \beta & + & (m+4)\gamma & = & 0 \\ -\alpha & + & 3\beta & - & 11\gamma & = & 0 \end{array}$$

Овај систем има нетривијална решења (а тада су a, b и c линеарно зависни) ако је његова детерминанта D једнака нули. Како је

$$D = \begin{vmatrix} m-3 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & m+4 \\ -1 & 3 & -11 \end{vmatrix} = -3m^2 + 7m + 40,$$

тражени услов је испуњен за $m \in \{-8/3, 5\}$.

2. За $m = 5$ имамо векторе

$$a = (2, 3, -1), \quad b = (1, -1, 3), \quad c = (1, 9, -11).$$

Из једнакости $c = \lambda a + \mu b$ добијамо систем

$$2\lambda + \mu = 1, \quad 3\lambda - \mu = 9, \quad -\lambda + 3\mu = -11$$

чије је решење $\lambda = 2$, $\mu = -3$. Према томе, $c = 2a - 3b$.

5. Одредити једначину равни α која садржи праву p и паралелна је правој q, ако је

$$p \ : \ \frac{x-3}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1}, \quad q \ : \ \frac{x-2}{1} - \frac{y+1}{-2} = \frac{z+2}{3}.$$

Решење: За вектор нормале равни α можемо узети $v_p \times v_q$, где су v_p и v_q вектори праваца датих правих. Како је

$$v_p \times v_q = (2, 1, -1) \times (1, -2, 3) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = i - 7j - 5k$$

и како раван α садржи тачку $P(3, 0, 1)$ (која је на правој p), једначина равни α је

$$1 \cdot (x - 3) - 7 \cdot (y - 0) - 5 \cdot (z - 1) = 0.$$

Према томе, $\alpha \ : \ x - 7y - 5z + 2 = 0$.