I **колоквијум 2023**

1. Одредити вредност реланог параметра A тако да функција

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{9x^2+9y^2-xy(x+y)+6xy}{3x^2+2xy+3y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ A, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

буде непрекидна у тачки (0,0).

2. Одредити све локалне екстремне вредности функције

$$f(x,y,z) = \ln(xyz^2) - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}y^2 - z^2 - xy.$$

3. Одредити најмању и највећу вредност функције

$$f(x,y) = x^2+y^2-4y+1,$$

на области $D = \{(x,y) : y \geq \frac{1}{2}|x|,\ x^2+y^2 \leq 5\}$.

Решења:

1. Да би функција f била непрекидна у тачки $(0,0)$ неопходно је да важи $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = A$. Приметимо најпре да важи

$$\begin{aligned}\frac{9x^2+9y^2-xy(x+y)+6xy}{3x^2+2xy+3y^2} &= \frac{3(x^2+3y^2+2xy)-xy(x+y)}{3x^2+2xy+3y^2} \\ &= 3 - \frac{xy(x+y)}{3x^2+2xy+3y^2} = 3 - \frac{xy(x+y)}{2x^2+(x+y)^2+2y^2}.\end{aligned}$$

Докажимо да је $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 3$, односно да је

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy(x+y)}{2x^2+(x+y)^2+2y^2} = 0.$$

Наиме, јасно је да важи $2x^2+(x+y)^2+2y^2 \geq x^2$ и $2x^2+(x+y)^2+2y^2 \geq y^2$, одакле следи да за $(x,y)\neq(0,0)$ важи

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left|\frac{xy(x+y)}{2x^2+(x+y)^2+2y^2}\right| \leq \frac{x^2|y|+y^2|x|}{2x^2+(x+y)^2+2y^2} \\ &= \frac{x^2}{2x^2+(x+y)^2+2y^2}|y| + \frac{y^2}{2x^2+(x+y)^2+2y^2}|x| \\ &\leq |y|+|x| \to 0, \text{ кад } (x,y)\to(0,0). \end{aligned}$$

Дакле, дата функција је непрекидна у тачки $(0,0)$ за $A=3$.

2. Функција f је дефинисана за све уређене тројке (x, y, z) такве да је $xy > 0$ и $z \neq 0$

Стационарне тачке ћемо добити из услова $f'_x = 0$, $f'_y = 0$, $f'_z = 0$, што је еквивалентно са $\frac{1}{x} - x - y = 0$, $\frac{1}{y} - \frac{1}{4}y - x = 0$, $\frac{2}{z} - 2z = 0$. Одавде једноставно добијамо следећи систем једначина:

$$x^2 + xy = 1 \tag{1}$$

$$y^2 + 4xy = 4 \tag{2}$$

$$z^2 = 1. \tag{3}$$

Видимо најпре да из (3) следи да је $z = 1$ или $z = -1$. Ако помножимо једначину (1) са (-4) и додамо једначини (2) добићемо да за x и y мора важити $y^2 - 4x^2 = 0$, одакле закључујемо да мора бити $y = 2x$ или $y = -2x$. Враћењем у (1) видимо да у првом случају мора бити $3x^2 = 1$, одакле је $x = 1/\sqrt{3}$ или $x = -1/\sqrt{3}$, док је у другом случају $-x^2 = 1$, што нема решења у скупу реалних бројева. Дакле, имамо четири стационарне тачке, $S_1\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}, 1\right)$, $S_2 = -\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}}, 1\right)$, $S_3\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}, -1\right)$ и $S_4 = -\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}}, -1\right)$.

Други парцијални изводи дате функције су $f''_{xx} = -\frac{1}{x^2} - 1$, $f''_{xy} = -1$, $f''_{xz} = 0$, $f''_{yy} = -\frac{1}{y^2} - \frac{1}{4}$, $f''_{yz} = 0$ и $f''_{zz} = -\frac{2}{z^2} - 2$.

Нека су D_1, D_2 и D_3 главни минори Хесеове матрице $\begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{xy} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{xz} & f''_{yz} & f''_{zz} \end{bmatrix}$. Тада за све четири стационарне тачке важи:

$$D_1 = -4 < 0, \quad D_2 = \begin{vmatrix} -4 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 3 > 0 \text{ и } D_3 = \begin{vmatrix} -4 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = -12 < 0,$$

На основу Силвестеровог критеријума, функција f има локални максимум у тачкама S_1, S_2, S_3 и S_4 и важи $f(S_1) = f(S_2) = f(S_3) = f(S_4) = -2 - \ln\frac{3}{2}$.

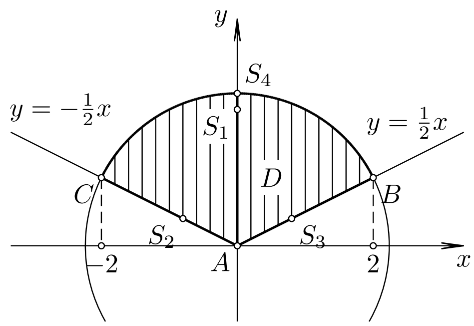
3. Одредимо најпре пресечне тачке криве $y = \frac{1}{2}|x|$ и кружнице $x^2 + y^2 = 5$:

$$x^2 + \left(\frac{1}{2}|x|\right)^2 = 5 \;\Rightarrow\; \frac{5}{4}x^2 = 5 \;\Rightarrow\; x = \pm 2,\, y = 1,$$

односно пресечне тачке су $(-2, 1)$ и $(2, 1)$. Нека су A, B, C тачке са координатама $A(0, 0)$, $(2, 1)$ и $(-2, 1)$, редом (видети слику).

Из услова $f'_x(x, y) = 0$, $f'_y(x, y) = 0$, односно $2x = 0$, $2y - 4 = 0$, добијамо стационарну тачку $S_1(0, 2)$ која припада области D.

На отвореној дужи AC је $f(x, -\frac{1}{2}x) = \frac{5}{4}x^2 + 2x + 1 = f_1(x)$, $x \in (-2, 0)$. Услов $f'_1(x) = 0$ је еквивалентан са $\frac{5}{2}x + 2 = 0$, односно $x = -\frac{4}{5} \in (-2, 0)$, одакле добијамо стационарну тачку $S_2(-\frac{4}{5}, \frac{2}{5})$.



Слично, на отвореној дужи AB је $f(x, \frac{1}{2}x) = \frac{5}{4}x^2 - 2x + 1 = f_2(x)$, за $x \in (-2, 0)$. Из услова $f_2'(x) = 0$ добијамо $x = \frac{4}{5} \in (0, 2)$, односно још једну стационарну тачку, $S_3(\frac{4}{5}, \frac{2}{5})$.

На кружном луку BC је $f(x, \sqrt{5 - x^2}) = x^2 + 5 - x^2 - 4\sqrt{5 - x^2} + 1 = 6 - 4\sqrt{5 - x^2} = f_3(x)$, за $x \in (-2, 2)$. Из услова $f_3'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{4x}{\sqrt{5 - x^2}} = 0$ закључујемо је $x = 0 \in (-2, 2)$ и $y = \sqrt{5}$, односно $S_4(0, \sqrt{5})$ је још једна стационарна тачка.

Поред ових тачака, кандидати за најмању и највећу вредност су и тачке A, B и C. Рачунањем вредности $f(S_1) = -3$, $f(S_2) = f(S_3) = \frac{1}{5}$, $f(S_4) = 6 - 4\sqrt{5}$, $f(A) = 1$ и $f(B) = f(C) = 2$, закључујемо да је:

$$\min_D f = f(S_1) = -3,$$
$$\max_D f = f(B) = f(C) = 2.$$

НАПОМЕНА: Пошто није очигледно, покажимо да је заиста $f(S_4) > -3$:

$$6 - 4\sqrt{5} > -3 \;\Leftrightarrow\; 4\sqrt{5} < 9 \;\Leftrightarrow\; (4\sqrt{5})^2 < 9^2 \;\Leftrightarrow\; 80 < 81,$$

одакле следи закључак.