I **колоквијум 2024**

1. Доказати да је функција

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{3x^2+y^3-2xy^2}{\sqrt{x^2+y^4}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

непрекидна у тачки (0,0), а затим израчунати парцијалне изводе у тачки $(0,0)$ или показати да они не постоје.

2. Одредити све локалне екстремне вредности функције $z=f(x,y)$ задате имплицитно једначином

$$\frac{x^2+2y^2}{4}+\frac{z^3}{3}-xz-2yz+2x+y+\frac{9}{2}=0,\quad z>0.$$

3. Одредити најмању и највећу вредност функције

$$f(x,y)=x^2+y^2-xy,$$

на области $D=\{(x,y):\, x^2+y^2\leq 9,\, |y|\leq 3(x+1)\}$.

Решења:

1. Да би функција f била непрекидна у тачки $(0,0)$ неопходно је да важи $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=f(0,0)=0$.

Применом неједнакости $|x+y|\leq|x|+|y|$, као и очигледних неједнакости $x^2+y^4\geq x^2$ и $x^2+y^4\geq y^4$ добијамо да је

$$\begin{aligned}0\leq|f(x,y)|&=\frac{|3x^2+y^3-2xy^2|}{\sqrt{x^2+y^4}}\leq\frac{3x^2}{\sqrt{x^2+y^4}}+\frac{y^2(|y|+2|x|)}{\sqrt{x^2+y^4}}\\ &\leq\frac{3x^2}{|x|}+\frac{y^2(|y|+2|x|)}{y^2}=5|x|+|y|\to 0,\quad \text{кад } (x,y)\to(0,0),\end{aligned}$$

одакле следи непрекидност.

Даље, важи

$$\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\frac{\frac{3\Delta x^2+0^3-2\Delta x\cdot 0}{\sqrt{\Delta x^2+0^4}}-0}{\Delta x}=\frac{3\Delta x^2}{\Delta x|\Delta x|},$$

одакле је

$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=3,\quad \text{односно}\quad \lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=-3,$$

па закључујемо да не постоји парцијални извод $f'_x(0,0)$.

Са друге стране, важи

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\frac{3\cdot 0^2+\Delta y^3-2\cdot 0\cdot\Delta y^2}{\sqrt{0^2+\Delta y^4}}-0}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta y^3}{\Delta y^3}=1,$$

па постоји парцијални извод по промењивој y и важи $f'_y(0,0)=1$.

2. Нека је $F(x,y,z)=\frac{x^2+2y^2}{4}+\frac{z^3}{3}-xz-2yz+2x+y+\frac{9}{2}$, тако да је функција z имплицитно задата везом $F(x,y,z)=0$. Диференцирањем једнакости $F(x,y,z)=0$ по x и y, редом добијамо да је

$$z'_x(x+2y-z^2)=\frac{x}{2}-z+2, \tag{1}$$

$$z'_y(x+2y-z^2)=y-2z+1. \tag{2}$$

Стационарне тачке ћемо тражити из услова $z'_x=z'_y=F(x,y,z)=0$. Из прва два услова имамо да је

$$\frac{x}{2}-z+2=0,$$
$$y-2z+1=0,$$

одакле једноставно добијамо везу $x=2z-4$ и $y=2z-1$. Даље, из једнакости $F(2z-4,2z-1,z)=0$, односно, након сређивања

$$\frac{z^3}{3}-3z^2+6z=0 \quad\Leftrightarrow\quad z(z^2-9z+18)=0$$

и услова $z>0$ добијамо да је $z=3$ или $z=6$. Одатле директно добијамо стационарне тачке $S_1(2,5)$ и $S_2(8,11)$, уз $z(S_1)=3$ и $z(S_2)=6$.

Диференцирањем (1) по x и y, и (2) по y, добијамо да је

$$z''_{xx}(x+2y-z^2)=2z(z'_x)^2-2z'_x+\frac{1}{2},$$
$$z''_{xy}(x+2y-z^2)=2zz'_xz'_y+2z'_x+z'_y,$$
$$z''_{yy}(x+2y-z^2)=2z(z'_y)^2-4z'_y+1.$$

За тачку S_1 је $z''_{xx}(S_1)=\frac{1}{6}$, $z''_{xy}=0$ и $z''_{yy}=\frac{1}{3}$, а за тачку S_2 је $z''_{xx}(S_2)=-\frac{1}{12}$, $z''_{xy}(S_2)=0$ и $z''_{yy}(S_2)=-\frac{1}{6}$.

Нека су D_1 и D_2 главни минори Хесеове матрице $\begin{bmatrix} z''_{xx} & z''_{xy} \\ z''_{xy} & z''_{yy}\end{bmatrix}$. Тада за стационарну тачку S_1 важи:

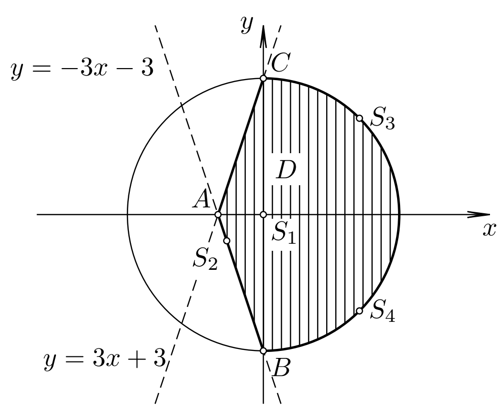
$$D_1=\frac{1}{6}>0,\ \ D_2=\begin{vmatrix} 1/6 & 0 \\ 0 & 1/3\end{vmatrix}=\frac{1}{18}>0,$$

док за стационарну тачку S_2 важи

$$D_1=-\frac{1}{12}<0,\ \ D_2=\begin{vmatrix} -1/12 & 0 \\ 0 & -1/6\end{vmatrix}=\frac{1}{72}>0,$$

На основу Силвестеровог критеријума, функција z има локални минимум у тачки S_1 и локални максимум у тачки S_2.

3. Дата област D је означена на слици испод. Кандидате за најмању и највећу вредност ћемо тражити у унутрашњости области D, на отвореним дужима AB и AC, на луку BC, као и међу самим тачкама $A(-1,0), B(0,-3)$ и $C(0,3)$



Из услова $f'_x = 0$, $f'_y = 0$ добијамо да је $2x - y = 2y - x = 0$, одакле је $x = y = 0$, па је један кандидат стационарна тачка $S_1(0,0)$.

Дуж AB се може описати као скуп тачака (x,y), таквих да је $y = -3x-3$, $x \in (-1,0)$. Важи $f(x,-3x-3) = 13x^2 + 21x + 9 = f_1(x)$. Из услова $f_1'(x) = 0$ добијамо $26x + 21 = 0$, одакле је $x = -\frac{21}{26}$ и $y = -\frac{15}{26}$. Дакле, нови кандидат је тачка $S_2(-\frac{21}{26}, -\frac{15}{26})$

За тачке дужи AC важи $y = 3x+3$, $x \in (-1,0)$. Имамо да је $f(x,3x+3) = 7x^2 + 15x + 9 = f_2(x)$. Из услова $f_2'(x) = 0$, односно $14x + 15 = 0$ добијамо $x = -\frac{15}{14} \notin (-1,0)$, па на овој дужи немамо кандидата за најмању и највећу вреднсот.

На луку BC ћемо кандидате тражити преко Лагранжове функције: Нека је

$$L(x,y;\lambda) = x^2 + y^2 - xy + \lambda(x^2 + y^2 - 9).$$

Тада из услова $L'_x = L'_y = 0$ добијамо да је

$$\begin{aligned} 2x - y + 2\lambda x &= 0, \\ 2y - x + 2\lambda y &= 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Одузимањем прве од друге једначине у претходном систему добијамо да је $(y-x)(3+2\lambda) = 0$. У случају да је $x = y$, користећи услов $x^2 + y^2 = 9$ добијамо да је $x = y = \frac{3}{\sqrt{2}}$, односно $S_3(\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}})$ је нова тачка-кандидат.

У случају $\lambda = -\frac{3}{2}$, заменом у систем (3) добијамо да је $y = -x$, па из $x^2 + y^2 = 9$, добијамо стационарну тачку $S_4(\frac{3}{\sqrt{2}}, -\frac{3}{\sqrt{2}})$ која припада луку BC.

Рачунајући вредности функције f у тачкама A, B, C и S_i, $i = 1, ..., 4$, закључујемо да је најмања вредност у тачки S_1, $f(S_1) = 0$, а највећа вредност у тачки S_4, $f(S_4) = \frac{27}{2}$.