МАТЕМАТИКА 1

2. Колоквијум, јануар 2011 - Група Д

1. Испитати конвергенцију низа (a_n) чији је општи члан задат са

$$a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{27n^3+n}} + \frac{1}{\sqrt[3]{27n^3+n+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt[3]{27n^3+3n}}$$

и у случају да конвергира одредити његову граничну вредност.

Решење: Ако је $b_n = \dfrac{2n+1}{\sqrt[3]{27n^3+3n}}$ и $c_n = \dfrac{2n+1}{\sqrt[3]{27n^3+n}}$, тада је $b_n < a_n < c_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = \dfrac{2}{3}$. На основу *теореме о три низа* следи да је низ (a_n) конвергентан и да је

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{2}{3}.$$

2. Дата је функција $f : x \mapsto (x-1)\cdot e^{1/(x-3)}$.

(а) Одредити област дефинисаности D_f функције f.

(б) Испитати понашање функције на границама домена D_f.

Решење: (а) $D_f = (-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$.

(б) Како $f(x) \to 0$ када $x \to 3_-$ и $f(x) \to +\infty$ када $x \to 3_+$, то је права $x = 3$ вертикална асимптота за $x \to 3_+$.

За $x \to \pm\infty$ важи

$$\frac{1}{x-3} = \frac{1}{x}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{-1} = \frac{1}{x}\left(1+o(1)\right) = \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right), \quad e^{1/(x-3)} = 1 + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right),$$

$$f(x) = (x-1)\left(1+\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = x + o(1).$$

Према томе, права $y = x$ је коса асимптота и за $x \to -\infty$ и за $x \to +\infty$.

3. Дата је функција $g : x \mapsto \sqrt{1-\sin 3x}$.

(а) Одредити Маклоренов полином M_3 степена 3 за функцију g.

(б) Израчунати $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{16g(x)+18x^2+24x-16}{x^3}$.

Решење: Како је $\sin 3x = 3x - \dfrac{1}{3!}(3x)^3 + o(x^3) = 3x - \dfrac{9}{2}x^3 + o(x^3)$ за $x \to 0$, то је $1 - \sin 3x = 1 + h(x)$, где је $h(x) = -3x + \dfrac{9}{2}x^3 + o(x^3)$. Према томе, за $x \to 0$ је

$$\begin{aligned}
g(x) &= 1 + \frac{1}{2}h(x) + \binom{1/2}{2}h^2(x) + \binom{1/2}{3}h^3(x) + o(h^3(x)) \\
&= 1 + \frac{1}{2}h(x) + \frac{1/2\cdot(-1/2)}{2}\cdot 9x^2 + \frac{1/2\cdot(-1/2)\cdot(-3/2)}{2\cdot 3}\cdot(-27x^3) + o(x^3) \\
&= 1 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}x^3 - \frac{9}{8}x^2 - \frac{27}{16}x^3 + o(x^3) \\
&= 1 - \frac{3}{2}x - \frac{9}{8}x^2 + \frac{9}{16}x^3 + o(x^3).
\end{aligned}$$

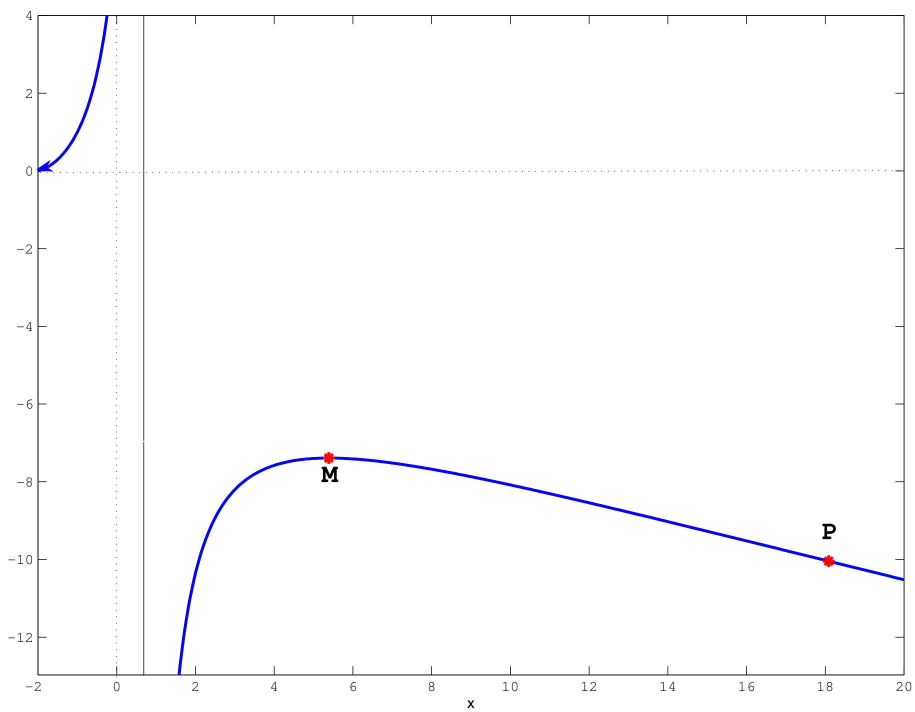
(а) $M_3(x) = 1 - \frac{3}{2}x - \frac{9}{8}x^2 + \frac{9}{16}x^3$.

(б) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{16g(x) + 18x^2 + 24x - 16}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{9x^3 + o(x^3)}{x^3} = 9$.

4. Испитати ток и скицирати график функције $y(x) = \dfrac{x+2}{1-\ln(x+2)}$.

Решење: (1) Област дефинисаности $D_y = (-2, x_1) \cup (x_1, +\infty)$, где је $x_1 = e-2$, добијамо из услова $x+2 > 0$ и $1-\ln(x+2) \neq 0$. Како $y(x) \to +\infty$ када $x \to x_{1-}$ и $y(x) \to -\infty$ када $x \to x_{1+}$, права $x = x_1$ је вертикална асимптота. За $x \to -2_+$ имамо $y(x) \to 0$, а за $x \to +\infty$ важи $y(x) \to -\infty$. Пошто $y(x)/x \to 0$ када $x \to +\infty$, функција нема косу асимптоту. Функција нема нуле, позитивна је за $x < x_1$, а негативна за $x > x_1$.

(2) Из $y'(x) = \dfrac{2-\ln(x+2)}{(1-\ln(x+2))^2}$ следи да је функција растућа на интервалима $(-2, x_1)$ и (x_1, x_2), где је $x_2 = e^2-2$, а опадајућа на интервалу $(x_2, +\infty)$. Према томе, функција у тачки $x = x_2$ има локални максимум једнак $-e^2$ (одговарајућа тачка на графику је означена са M).



(3) Из $y''(x) = \dfrac{\ln(x+2)-3}{(x+2)(\ln(x+2)-1)^3}$ следи да је функција y конвексна на интервалима $(-2, x_1)$ и $(x_3, +\infty)$, где је $x_3 = e^3-2$, а конкавна на интервалу (x_1, x_3). Према томе, график функције има превојну тачку P за $x = x_3$.

На слици је дата скица графика функције y.

Драган Ђорић