МАТЕМАТИКА 1

2. Колоквијум, јануар 2014 - Група 2

1. Дат је низ (a_n), где је

$$a_n = \frac{1}{\sqrt[4]{n^4-2n}} + \frac{1}{\sqrt[4]{n^4-2n+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt[4]{n^4+3n}}, \quad n \geq 2.$$

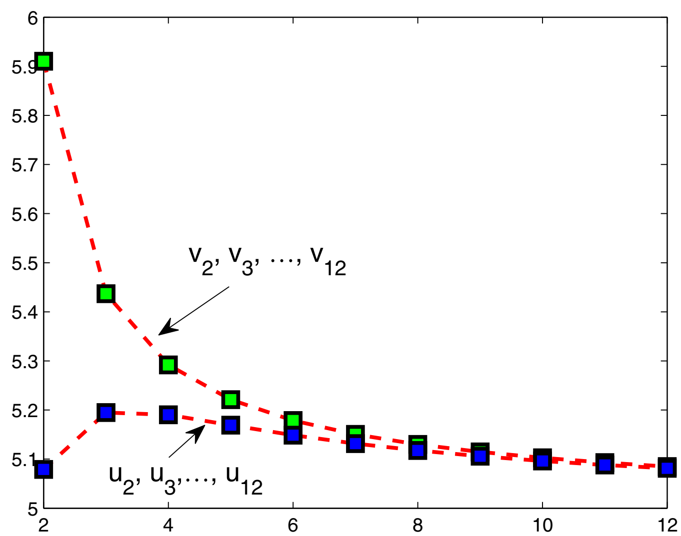
(1) Испитати конвергенцију низа (a_n) и у случају да конвергира одредити његову граничну вредност.

(2) Одредити тачке нагомилавања низа (b_n) чији је општи члан дат са

$$b_n = \frac{(-1)^n + 2}{3} \cdot a_n + \frac{n^2 \cos\frac{2n\pi}{3} + 1}{3n^2 - n}.$$

Решење: (1) Ако је $u_n = \dfrac{5n+1}{\sqrt[4]{n^4+3n}}$ и $v_n = \dfrac{5n+1}{\sqrt[4]{n^4-2n}}$, тада је $u_n < a_n < v_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} v_n = 5$. На основу *теореме о три низа* следи да је низ (a_n) конвергентан и да је $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 5.$

На следећој слици је уцртано првих неколико чланова 'полицајаца' (u_n) и (v_n), а одговарајући чланови низа (a_n) се налазе између њих.



(2) Нека је $b_n = p_n \cdot a_n + c_n \cdot q_n + r_n$, где је

$$p_n = \frac{(-1)^n + 2}{3}, \quad q_n = \frac{n^2}{3n^2 - n}, \quad c_n = \cos\frac{2n\pi}{3}, \quad r_n = \frac{1}{3n^2 - n}.$$

Низови (a_n), (q_n) и (r_n) су конвергентни, при чему је

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 5, \quad \lim_{n\to\infty} q_n = \frac{1}{3}, \quad \lim_{n\to\infty} r_n = 0,$$

а низови (p_n) и (c_n) су периодични јер је

$$p_{2k} = 1, \quad p_{2k+1} = \frac{1}{3}\ (k \in \mathbb{N}), \qquad c_{3l} = 1, \quad c_{3l+1} = c_{3l+2} = -\frac{1}{2}\ (l \in \mathbb{N}).$$

Ако дати низ (b_n) разложимо на шест поднизова (узимајући у подниз сваки шести члан), имамо

$$\begin{aligned}
b_{6m} &= 1\cdot a_{6m} + 1\cdot q_{6m} + r_{6m} \to 1\cdot 5 + 1\cdot\frac{1}{3} + 0 = \frac{16}{3}, \quad m\to\infty,\\
b_{6m+1} &= \frac{1}{3}\cdot a_{6m+1} - \frac{1}{2}\cdot q_{6m+1} + r_{6m+1} \to \frac{1}{3}\cdot 5 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + 0 = \frac{3}{2}, \quad m\to\infty,\\
b_{6m+2} &= 1\cdot a_{6m+2} - \frac{1}{2}\cdot q_{6m+2} + r_{6m+2} \to 1\cdot 5 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + 0 = \frac{29}{6}, \quad m\to\infty,\\
b_{6m+3} &= \frac{1}{3}\cdot a_{6m+3} + 1\cdot q_{6m+3} + r_{6m+3} \to \frac{1}{3}\cdot 5 + 1\cdot\frac{1}{3} + 0 = 2, \quad m\to\infty,\\
b_{6m+4} &= 1\cdot a_{6m+4} - \frac{1}{2}\cdot q_{6m+4} + r_{6m+4} \to 1\cdot 5 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + 0 = \frac{29}{6}, \quad m\to\infty,\\
b_{6m+5} &= \frac{1}{3}\cdot a_{6m+5} - \frac{1}{2}\cdot q_{6m+5} + r_{6m+5} \to \frac{1}{3}\cdot 5 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + 0 = \frac{3}{2}, \quad m\to\infty.
\end{aligned}$$

Пошто су сви ови поднизови (низови) конвергентни, њихове граничне вредности су једине тачке нагомилавања датог низа (b_n).

Дакле, тачке нагомилавања датог низа су бројеви $\frac{3}{2}$, 2, $\frac{29}{6}$ и $\frac{16}{3}$.

2. Дате су функције $f : x \mapsto \ln(\cos x)$ и $g : x \mapsto e^{-2x^2}$.

(1) Одредити Маклоренове полиноме четвртог степена функција f и g.

(2) Одредити вредност реалног параметра A тако да функција h дефинисана са

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{g(x) - 4f(x) - 1}{x^3}, & x \neq 0\\ A, & x = 0\end{cases}$$

буде непрекидна у тачки $x = 0$.

Решење: (1) За $x \to 0$ је

$$f(x) = \ln\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^4}{4} + o(x^4) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4),$$

$$g(x) = 1 - 2x^2 + \frac{1}{2}\cdot 4x^2 + o(x^4) = 1 - 2x^2 + 2x^4 + o(x^4).$$

Према томе, тражени Маклоренови полиноми F_4 и G_4 за функције f и g су

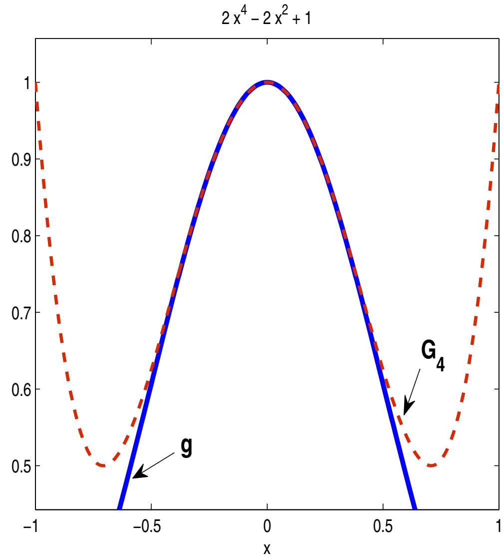
$$F_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12}, \quad G_4(x) = 1 - 2x^2 + 2x^4.$$

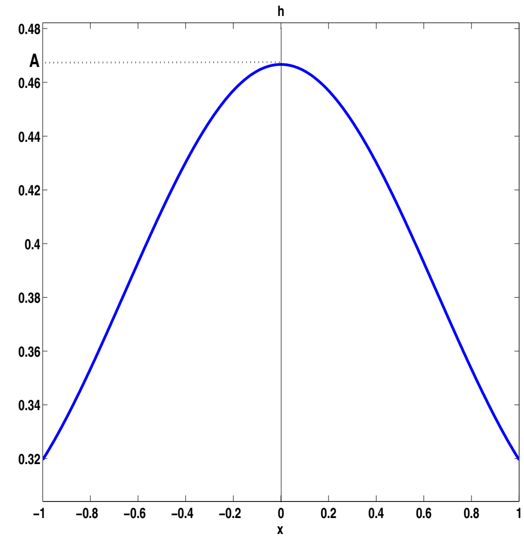
(2) За $x \to 0$ је

$$h(x) = \frac{G_4(x) - 4F_4(x) - 1 + o(x^4)}{5x^4} = \frac{\frac{7}{3}x^4 + o(x^4)}{5x^4} = \frac{7}{15} + o(1),$$

па је $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = \frac{7}{15}$. Према томе, функција h је непрекидна у тачки $x = 0$ ако је $A = \frac{7}{15}$.

На слици лево дати су графици функције g и Маклореновог полинома G_4, а на слици десно је график функције h у случају када је она непрекидна у тачки $x = 0$, односно када је $A = \frac{7}{15} \approx 4.66$.





4. Испитати ток и скицирати график функције $f : x \mapsto \dfrac{1+\ln x}{x(1-\ln x)}$.

Решење: (1) Из услова $x > 0$ и $1 - \ln x \neq 0$ добијамо да је $D_f = (0,e) \cup (e,+\infty)$, а из једнакости $1+\ln x = 0$ имамо да је $f(x) = 0$ за $x = 1/e$. Функција је позитивна за $x \in (1/e, e)$ и негативна за $x \in D_f \setminus (1/e, e)$.

Како је $\lim\limits_{x\to 0_+} x\ln x = 0$, то је $\lim\limits_{x\to 0_+} f(x) = -\infty$, па је y-оса вертикална асимптота графика функције f за $x \to 0_+$. Права $x = e$ је такође вертикална асимптота (и за $x \to e_-$ и за $x \to e_+$) јер је $\lim\limits_{x\to e_-} f(x) = +\infty$ и $\lim\limits_{x\to e_+} f(x) = -\infty$. За $x \to +\infty$ применом Лопиталовог правила добијамо

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1+\ln x}{x - x\ln x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1/x}{1-\ln x - 1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x\ln x} = 0,$$

што значи да је x-оса хоризонтална асимптота графика функције f.

(2) Пошто је

$$f'(x) = \frac{1-\ln x-(1+\ln x)(-\ln x)}{x^2(1-\ln x)^2} = \frac{1+\ln^2 x}{x^2(1-\ln x)^2} > 0, \quad x \in D_f,$$

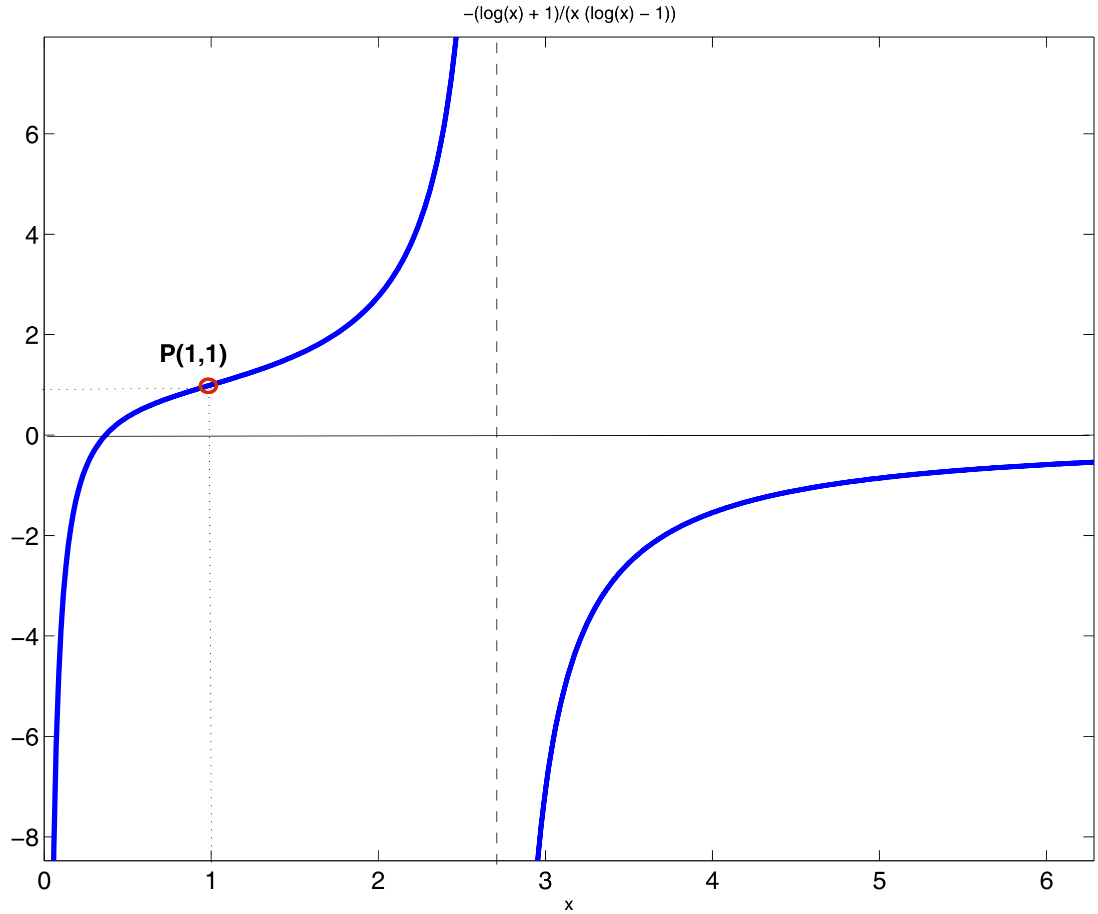
функција f је растућа на интервалима $(0,e)$ и $(e,+\infty)$.

(3) Диференцирањем првог извода добијамо

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left[\frac{1+\ln^2 x}{x^2(1-\ln x)^2}\right]' \\ &= \frac{2\ln x \cdot \dfrac{1}{x} \cdot x^2(1-\ln x)^2 - (1+\ln^2 x)\left[2x(1-\ln x)^2 + x^2\cdot 2(1-\ln x)\cdot \dfrac{-1}{x}\right]}{x^4(1-\ln x)^4} \\ &= \frac{2x\ln x(1-\ln x)^2 - 2x(1-\ln x)(1+\ln^2)(1-\ln x-1)}{x^3(1-\ln x)^4} \\ &= \frac{2\ln x(\ln^2 x - \ln x + 2)}{x^3(1-\ln x)^3}. \end{aligned}$$

Како је $\ln^2 x - \ln x + 2 > 0$ и $x > 0$ за $x \in D_f$, знак другог извода функције f исти је као и знак количника $\dfrac{\ln x}{1-\ln x}$.

Према томе, на интервалима $(0, 1/e)$ и $(e, +\infty)$ функција је конкавна, а на интервалу $(1/e, e)$ функција је конвексна. График дате функције има само једну превојну тачку $P(1, 1)$.



На слици је дата скица графика функције f.

Драган Ђорић